Vol. 1, No. 2, 2017, pp. 1–7

Math & Maroc est une revue mathématique publiée par l'association Math & Maroc dix fois par an. Elle propose des cours et des problèmes à résoudre de niveau secondaire.

Nous vous invitons à nous envoyer tous vos commentaires, remarques et suggestions en nous contactant à l'adresse redac.mathetmaroc@gmail.com.
Nous sommes aussi intéressés par de nouveaux problèmes. Tout problème proposé devrait s'accompagner d'une solution, ou au moins d'informations suffisantes pour indiquer qu'une solution est possible. Veuillez inclure toute référence ou réflexion qui pourrait aider les rédacteurs et rédactrices. Nous vous invitons particulièrement à envoyer des problèmes originaux. Toutefois, tout problème intéressant quoique non original est le bienvenu pour autant qu'il soit accompagné des références nécessaires. Dans ce cas-là, il faut obtenir la permission de l'auteur avant de publier le problème.
Le journal est aussi ouvert à de nouveaux articles ou de nouveaux cours. Les articles devraient être soigneusement rédigés et raisonnablement courts. Ils devraient être d'un niveau accessible à des élèves de collège ou de lycée.
N'hésitez pas à nous contacter pour toute information complémentaire.

Sommaire

Éditorial *Par Assil Fadle*

Face au formidable accueil critique de mars, qui a dépassé toutes nos attentes, l'équipe de rédaction est de retour pour une deuxième publication de Math &Maroc ! Tandis que l'association a une actualité chargée, avec un stage de préparation aux Olympiades qui vient de se conclure, nous inaugurons dans le journal les cours de combinatoire et de géométrie. Les sections qui ont fait le succès du premier numéro sont toujours là, comme la *Beauté des mathématiques* qui s'intéresse ce mois-ci à l'une des conjectures mathématiques les plus tenaces de l'Histoire ; mais aussi les *Mathématiciens d'hier et d'aujourd'hui* qui s'avèrent être en l'occurrence des mathématiciennes ! Il s'agit en effet d'une algébriste de renom et d'une compétitrice marocaine aux Olympiades de 2011. Enfin, les exercices du mois dernier sont intégralement corrigés et d'autres vous sont proposés sur les thèmes de cette édition. Dans ce nouveau numéro, nous espérons donc plus que jamais partager notre passion des mathématiques, et pourquoi pas créer de nouvelles vocations ! Bonne lecture à tous.

Portrait d'une mathématicienne : Emmy Noether

Emmy Noether (1882-1935) est une mathématicienne allemande et l'un des plus grands esprits mathématiques du vingtième siècle. Elle créa et inspira nombre de concepts inédits en algèbre et dans d'autres domaines mathématiques, malgré l'hostilité envers les femmes qui régnait alors dans le milieu universitaire allemand. C'est notamment à elle que l'on doit le développement de l'algèbre dite abstraite, qui étudie les structures plutôt que les équations. La pensée de Noether est à proprement parler révolutionnaire : par exemple, le célèbre Albert Einstein dira lui-même que le théorème de Noether (qui établit le lien entre les symétries d'un système physique et les lois de conservations de ce système) forme « un monument de la pensée mathématique ». Portrait.

L'enfance d'Emmy Noether est semblable à celle de la plupart des jeunes filles allemandes de l'époque : on lui apprend la cuisine, les travaux ménagers, la musique. Toutefois, Emmy baigne dans un milieu familial fortement imprégné de mathématiques : son père, Max Noether, était lui-même un grand mathématicien. En 1900, après avoir passé avec succès un examen de français et d'anglais (qui la destinait au métier d'enseignante de ces deux langues), elle décide de se réorienter vers les mathématiques et s'inscrit finalement à l'université d'Erlangen. La mixité est alors tout à fait nouvelle à l'université, et Emmy fait partie des deux seules étudiantes, pour un total de 986 inscrits ! De plus, elle doit demander à chaque professeur la permission d'assister à son cours, ou encore de subir un examen... Toutes ces contrariétés ne l'empêchent pas de soutenir en 1907 une thèse d'algèbre très bien reçue.

En 1915, Emmy Noether est invitée à travailler à l'université de Göttingen, notamment par le célèbre mathématicien David Hilbert. De nombreux membres de l'université s'opposent à cette proposition : qu'une femme enseigne à des hommes leur semble incongru. Toutefois, Hilbert insiste avec un mot resté célèbre : « nous sommes une université, pas des bains publics. » Une fois à Göttingen, Emmy peut finalement enseigner, mais sans salaire, et sous nom d'emprunt. Elle n'obtiendra le titre de professeur qu'en 1922, et aura son premier (maigre) salaire en 1923.

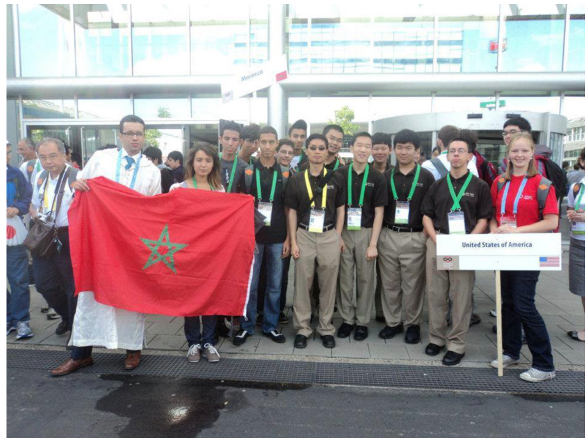
Sous l'influence de Noether, Göttingen devient une université de rang mondial. Dans les années 20, elle s'intéresse à l'algèbre commutative et développe la théorie des idéaux. Elle gagne graduellement la reconnaissance de ses pairs grâce à ses travaux novateurs et ses méthodes de conceptualisation révolutionnaires. Partout en Europe, des étudiants choisissent de se rendre à Göttingen pour étudier auprès d'elle. Se constitue ainsi un noyau dur d'étudiants dévoués, surnommés les « Noether's boys », qui ne s'offusquent pas de l'apparence physique négligée de leur enseignante et arrivent à suivre ses cours intenses. Ces cours, qui ressemblent plus à des discussions enflammées avec l'auditoire qu'à des cours magistraux, ne manquent pas d'effrayer les non-initiés. Toutefois, Noether prête beaucoup d'attention à ses élèves : elle les considère comme sa propre famille. Elle n'hésite d'ailleurs pas à donner des cours en dehors de l'université quand celle-ci est fermée, et va jusqu'à laisser ses étudiants s'approprier la paternité d'articles dont elle est à l'origine.

La reconnaissance académique vient enfin en 1932 avec d'une part le prix Alfred Ackermann-Teubner qu'elle partage avec Emil Artin, d'autre part une conférence donnée au congrès international des mathématiciens à Zurich. Néanmoins, lors de l'arrivée des Nazis au pouvoir en 1933, Emmy est démise de ses fonctions. Tout en continuant de recevoir ses anciens étudiants chez elle pour discuter mathématiques, elle se voit obligée de chercher un poste à l'étranger. Bien qu'elle songe un temps à l'université d'État de Moscou, où elle a déjà travaillé à la fin des années 20, et malgré ses sympathies communistes, elle va finalement au Bryn Mawr College aux États-Unis. Une fois en Amérique, elle entame une série de conférences au célèbre Institute for Advanced Study de Princeton, mais là-bas aussi le public masculin lui est hostile. On raconte que lorsqu'elle avait du mal à communiquer une idée aux étudiants au cours d'une leçon, elle utilisait soudainement l'allemand. Malgré la difficulté de la tâche et malgré la douleur de l'exil, elle s'applique avec ferveur à son rôle de professeur.

C'est au Bryn Mawr College qu'une tumeur fulgurante emporte subitement Noether en 1935. À l'annonce de sa mort, les hommages se multiplient de la part d'anciens élèves et d'admirateurs : on peut citer Bartel Leendert Van der Waerden dont le livre Moderne Algebra, qui est peut-être le plus influent ouvrage d'algèbre du vingtième siècle, doit beaucoup aux idées qu'il a apprises auprès de Noether ; ou encore le grand topologue Pavel Alexandrov pour qui Noether a été « la plus grande mathématicienne de tous les temps ». Autre hommage plus anecdotique : un cratère lunaire et un astéroïde portent désormais son nom.

D'Emmy Noether, on retient aujourd'hui des contributions spectaculaires en physique théorique et en topologie, mais aussi et surtout en algèbre abstraite. Les anneaux noethériens sont ainsi nommés en son honneur. Ses idées nouvelles et sa tendance à l'abstraction ont depuis atteint toutes les autres branches des mathématiques. Même le groupe des « Noether's boys » semble annoncer Bourbaki. Plusieurs étudiants qu'elle a formés sont devenus de grands mathématiciens ; tout le vingtième siècle porte l'empreinte de Noether. Ainsi, c'est une mathématicienne éminemment moderne qui, face à l'adversité et à la difficulté de faire des mathématiques en tant que femme à son époque, a su pratiquer son art et y apporter sa propre touche, du reste considérable.

Le coin des anciens : Majdouline Laanaiya



L'équipe des IMO 2011 réunie

6 ans après ma participation aux IMO (IMO 2011/ 42ème édition), j'écris ce petit témoignage dans l'espoir de capturer quelques moments magnifiques d'une expérience qui m'a beaucoup marquée. J'essayerai de m'attarder sur tout ce qui pourrait intéresser un jeune matheux ambitieux dans sa préparation aux tests. Par ailleurs, j'omettrai sûrement plusieurs détails déjà sombrés dans l'oubli. Le lecteur pressé pourra tout de même apprécier une narration qui, avec bon espoir, ne passera pas à côté de l'essentiel.

Comment j'ai connu les IMO

Tout a commencé lorsque j'ai découvert un forum marocain de mathématiques portant le nom de « Mathsmaroc ». Il a été crée par des professeurs de maths qui ont conçu diverses sections. Chaque section regroupe un type d'exercice et les membres du forum, profs et étudiants, y postaient constamment des problèmes, répondaient et discutaient autour de maths, il n'y avait pas de limites, pas de règles ! La section « Divers » pouvait servir quand on ne savait pas trop où caser son casse-tête. Mais attention, des petits malins étaient présents dans le seul but de répondre aux questions extraordinaires. Cette ambiance ravivée par la forte activité des forumeurs passionnés par la résolution de problèmes mathématiques m'a attiré vers ce site. Je voulais absolument appartenir à cette communauté et partager mon goût pour les maths. Au début, les noms les plus improbables des théorèmes me faisaient peur. Entre un Jensen très pondéré et un Tchebychev plus ordonné, j'avais du mal à suivre. Et puis j'ai compris que je n'avais pas les pré-requis nécessaires et qu'il me fallait une sérieuse mise à niveau. J'étais déterminée à apprendre. Le forum proposait aussi des liens vers d'autres ressources, des recueils de théorèmes ou encore des cours de préparation aux olympiades du type Animath et autres. J'ai commencé par découvrir des théorèmes utilisés pour résoudre des inégalités. Leurs noms commençaient à paraître moins monstrueux et plus familiers. Un argot mathématique commençait à se développer (RHS/LHS, WLOG, CQFD...) et j'ai essayé d'apprendre à rédiger les démonstrations avec le langage LaTeX pour plus de clarté dans mes posts. Finalement, j'eus le courage d'aborder des petites inégalités classiques et j'arrivais à mieux comprendre des démonstrations qui auparavant me paraissaient chimériques. Les moins initiés, je vous rassure, nous sommes tous passés par là ! C'est vrai qu'en terminale, je suis devenue plus active sur mathlinks (AOPS) que sur mathsmaroc qui devint de moins en moins visité. Pourtant, Mathsmaroc restera mon forum préféré. C'était pour moi la porte qui m'a permis de faire les plus jolies découvertes ; le plongeoir dans un monde fascinant.

Mon expérience des stages

J'ai participé à des stages régionaux dans mon lycée pour les élèves de seconde. C'était l'occasion de me préparer aux deux prochaines années, durant lesquelles auraient lieu les tests nationaux. Arrivée en première, les tests ont commencé et on comparait à chaque fois nos solutions sur le forum. On discutait de la difficulté des exercices proposés. J'ai commencé à me rendre compte que j'avais trop concentré mes efforts sur les inégalités, et laissé de côté tout le reste, surtout la géométrie et la combinatoire. C'était une grosse erreur de ma part (à bon entendeur...).Quoi qu'il en soit, je n'ai pas trop de regrets. Je les aimais bien, les petites inégalités, et je préfère faire les choses par pur plaisir sans obligation aucune. Durant les tests, le dernier exercice de géométrie était pour moi un simple accessoire pour symétriser la présentation de l'épreuve. Je prenais souvent avec moi des petits ciseaux, ou utilisais la fameuse technique de « couper à la règle » le cas échéant, pour me débarrasser du petit malaise de l'épreuve dès le début. Ensuite, je me concentrais sur le reste. Les tests de première année m'ont permis de m'entraîner pour les tests de terminale. D'ailleurs, plusieurs exercices étaient communs aux épreuves des deux années. Durant les vacances d'été qui précédaient ma rentrée en terminale, j'ai essayé de diversifier un peu plus mes exercices. Je commençais à prendre goût à l'arithmétique, aux équations fonctionnelles mais jamais à la combinatoire ou la géométrie. Cette dernière m'épouvantait avec ses cercles entrelacés se coupant dans les points les plus improbables d'où passe, comme par merveille, une sacrée droite s'avérant très particulière. L'année commença et on arrivait au premier stage ayant pour objectif la présélection d'une douzaine d'élèves. C'était le premier « meet up » des forumeurs. La majorité des élèves présents étaient en effet inscrits au forum. Le stage comportait deux tests qu'on passait les matins. Les après-midis étaient réservés aux corrections des épreuves. Le professeur chargé des explications des corrections était extraordinaire. C'est un grand homme qui a marqué des générations ! Le soir, nous nous rassemblions pour faire connaissance, discuter et nous plaindre des points qu'on nous aurait injustement enlevés. À la fin de chaque stage, je me décidais de travailler la géométrie pour faire mieux au stage suivant. Je voulais atteindre les IMO. C'était mon rêve le plus cher. Mon bac était d'une importance négligeable en comparaison. Heureusement qu'il y avait mes parents pour me faire la morale... Mais la géométrie m'était toujours aussi répulsive. La combinatoire, n'en parlons pas ! Les stages se succédèrent pour donner finalement lieu à la sélection des 6 participants (dont 5 forumeurs).

Les IMO à Amsterdam !

Avant de partir aux Pays-Bas, nous avons participé à un stage formatif de 3 jours. Il ne faut pas se comparer aux autres pays qui passent des mois, voire des années, à préparer les participants aux IMO. Nous autres Marocains, sommes très efficaces, 3 jours et toutes les maths sont en tête ! Et si vous êtes paradoxalement confrontés au classement des équipes aux IMO, dites-vous que l'efficacité et les résultats ne sont pas forcément corrélés... ! J'étais à la fois impatiente et inquiète. Mon rêve devenait réalité mais j'avais ce grand souci de représenter mon pays de la meilleure façon qui soit. Je voulais au moins remporter un prix. Une médaille et je serais aux nuages. Le lendemain de notre arrivée à Amsterdam, nous étions attendus à la cérémonie d'ouverture. Toutes les équipes vêtues de leurs habits traditionnels, accompagnées de leurs drapeaux, montaient sur scène pour se présenter au public dans une ambiance festive très conviviale. Une forte émotion et une grande fierté se mêlaient une fois sur scène, et on sentait monter la volonté de faire de son mieux pour être à la hauteur. Après la cérémonie, on prit des photos avec d'autres équipes et on échangea des *goodies* de divers pays. Une atmosphère d'échange et de partage envahissait l'espace de la cérémonie. Les Anglais abandonnaient leurs chapeaux trilby pour essayer des sombreros mexicains. Ce fut un joli tableau de toutes les couleurs et tous les motifs culturels. Cette ambiance sympathique allégeait, ne serait-ce que pour une seule journée, le stress de ce qui nous attendait les deux prochains jours. *Day 2*, on se réveille tôt le matin. Le test commence à 8:30. Le tout se passe dans une salle de gymnase immense, les tables sont disposées en plusieurs rangées. Sur chaque table vient se poser le petit drapeau du participant. On nous fait signe de tourner la feuille. Pas d'inégalités ! Le premier et le troisième exercice (P1 et P3) étaient des problèmes d'algèbre. Et puis, pour le P2, il fallait nous embêter avec le cliché néerlandais des moulins à vent, sous sa forme qui m'est la moins désirable : la géométrie. Maintenant, après plusieurs années, j'essaie de revoir ces exercices pour m'en souvenir un peu et je peux désormais avouer que le P2 était un très joli problème. Pourtant, au moment de l'épreuve, je ne pensais qu'à réutiliser la fameuse technique de la règle. Mais je n'ai pas pu faire subir à une épreuve des IMO une telle manie. J'ai essayé de me concentrer sur le P1. Quant au P3, généralement réputé le plus difficile, il ne m'a inspiré aucun espoir. Décision prise, j'ai consacré quatre heures au P1. J'ai trouvé la solution et il fallait bien rédiger la démonstration avec le plus de minutie possible. Il aurait quand même été dommage de perdre 1 ou 2 points pour de petites précisions omises. Je passai le temps à lire et relire la preuve, à insérer de petites lignes et à en supprimer d'autres. En sortant, j'ai vérifié ma solution et j'étais rassurée. J'espérais bien avoir une inégalité ou un problème d'arithmétique au P4 le lendemain pour pouvoir rêver d'une médaille. *Day 3*, tout allait se jouer ce jour-là. Je sentais la pression peser lourd. Je découvris l'épreuve et à ma grande déception, de la combinatoire au P4 ! Le P6 était un exercice de géométrie tandis que le P5 d'arithmétique modulaire. En d'autres termes, c'était mort ! Pendant les 4 heures de l'épreuve, j'ai d'abord essayé de trouver quelques résultats pour le P5 sans avoir le moindre espoir de le résoudre. Ensuite, je regardai autour de moi et tentai de deviner qui parmi les chinois qui m'entouraient allait obtenir les 42 points (mal deviné, seule une Allemande a atteint le score parfait cette année-là). Après la fin de l'examen, j'entendis dire que le P5 n'était pas si inaccessible. J'ai essayé de repartir des éléments de réponse que j'avais pu établir durant l'examen. La solution découlait après 3 ou 4 lignes de synthèse des résultats. Mais cela n'avait aucune importance, ce qui était fait était fait et la médaille était désormais d'une probabilité nulle. Tout ce que j'espérais était ne pas avoir de mauvaise surprise au P1...

Après les épreuves...

Les 3 jours suivants étaient remplis de petites sorties dans la ville. La forte pluie n'est pas ce que l'on peut désirer le plus pour se balader en plein été. Pourtant, rien n'empêche d'apprécier la splendeur d'Amsterdam traversée par ses jolis canaux. Beaucoup d'activités étaient au rendez-vous : des excursions, de petites conférences... On nous a même programmé une visite de la cour pénale internationale de La Haye ainsi qu'un tournoi de football au stade Amsterdam ArenA que nous avons remporté en collaboration avec les Norvégiens (fusion nécessaire de deux équipes pour en former une de 11 joueurs - j'étais en surplus, on m'a chargé des applaudissements...). Nos superviseurs n'ont pas tardé à nous informer des résultats. J'ai pu obtenir la note complète au P1 et quelques points au P5. C'était ce que je pouvais espérer de mieux après les épreuves. Ce résultat m'a permis de décrocher une mention honorable. Notre équipe a pu faire un travail remarquable cette année : 2 médailles (une médaille de bronze et une médaille d'argent) et 2 mentions honorables. C'était un score qui nous plaçait au milieu du tableau du classement des pays participants. Les 8 jours sont passés si vite que je n'ai pu m'en apercevoir. Il était temps de revenir au Maroc.

Conclusion

Avec un peu de recul sur cette merveilleuse expérience, j'ai quelques petits constats que je voudrais transmettre aux jeunes matheux intéressés pas les IMO. La préparation aux IMO vous permettra de découvrir un monde où les maths ne se limitent pas à leur valeur « d'utilité » qu'on essaie de nous inculquer à l'école. La beauté des mathématiques se sentira à travers les liens inattendus qu'on pourra exhiber entre des êtres mathématiques (nombres, fonctions, points, droites. . .) au cours d'un processus de résolution libre sans directives. La préparation à la compétition demande un effort considérable d'auto-formation, surtout vu l'absence de formation de préparation des participants au Maroc. C'est une occasion d'approfondir ses connaissances et de construire des bases solides de raisonnement mathématique et logique en général. Sans oublier la sensation de confiance qu'inspire la résolution d'un exercice ardu qui vous a pris des heures, voire plusieurs jours de réflexions. Enfin, la participation à des compétitions vous permettra de connaitre des personnes *formidables* que vous ne rencontreriez jamais sans l'expérience des Olympiades (nationales et internationales). Par ailleurs, se concentrer sur l'aspect compétitif de l'expérience est tout ce qui pourra nuire à la beauté de cette aventure. On se focalise trop sur l'obtention d'une médaille et on passe à côté de l'essentiel. Se rappeler de la première raison pour laquelle on a choisi un tel parcours, prévient des émotions négatives attachées, source de stress et de « poids lourds » durant l'examen. Et puis, le pire serait de se fier aux idées reçues et se fixer des jugements sur la difficulté d'un exercice ou de se prononcer sur l'impossibilité de le résoudre. De plus, la beauté de mathématiques est présente sous toutes ses formes : algébrique, géométrique et combinatoire... Décider de ne pas aimer un type d'exercice sans avoir fait l'effort de découvrir ses aspects est un signe d'entêtement déraisonnable. Finalement, la question qui revient le plus souvent : la corrélation de la participation aux IMO avec l'excellence du parcours post-bac. Je connais des personnes qui n'ont pas forcément participé aux IMO et qui excellent dans leurs parcours de chercheurs, notamment en mathématiques. Les IMO sont une expérience, parmi d'autres, qui nous apprennent à développer notre sens de créativité et d'indépendance et à cultiver la détermination, condition *sine qua non* du succès. Ce qui rend l'expérience unique pour un amateur de maths est peut-être le fait de palper cet ingrédient magique stimulant notre passion pour la recherche. Il s'agit de l'élément moteur d'un enthousiasme qu'on poursuivrait inlassablement tout au long de sa carrière.

Vol. 1, No. 2, 2017, pp. 8–15

COMBINATOIRE - Le principe des tiroirs

Antoine Séré

Introduction

Ce cours a pour but de vous faire comprendre un énoncé mathématique : le principe des tiroirs, et de vous apprendre à l'utiliser dans des exercices.
Dans le but d'introduire ce principe, je vous invite à réaliser les exercices d'approche expérimentale, puis d'en regarder le corrigé.
Ils serviront de base pour comprendre l'énoncé général du principe et son intérêt.
Ensuite, passez un peu de temps pour comprendre l'énoncé général du principe, en essayant notamment d'examiner des cas particuliers.
Enfin, faites le plus d'exercices possibles sur le sujet, en ne vous limitant pas aux seuls exercices présents dans ce cours.

1. Approche expérimentale

1.1. Un premier problème

Alex possède dans sa cave une caisse de chaussettes rouges ou bleues, et veut se munir d'une paire de chaussettes de même couleur.
Or la lampe de la cave ne fonctionne pas, et Alex ne peut donc pas voir la couleur des chaussettes avant de revenir dans un endroit éclairé.
Combien de chaussettes au minimum doit prendre Alex pour avoir avec certitude une paire de chaussettes monochrome ?

1.2. Une première solution

Alex doit prendre une paire de chaussettes, donc au moins deux chaussettes.
Que peut-il se passer si Alex décide de tirer deux chaussettes ? Il y a alors trois tirages possibles :

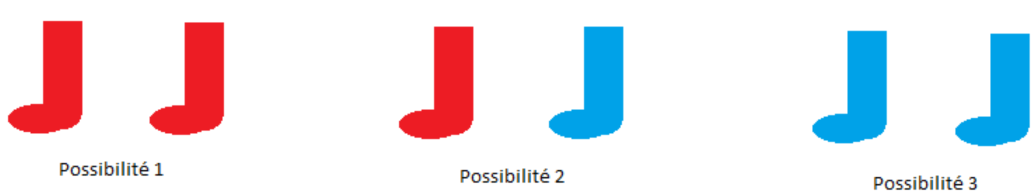


FIGURE 1. Tirage de deux chaussettes

On observe que la deuxième possibilité de tirage ne permet pas d'obtenir une paire de chaussettes monochrome : il faut donc tirer plus de chaussettes.
Essayons avec trois chaussettes :

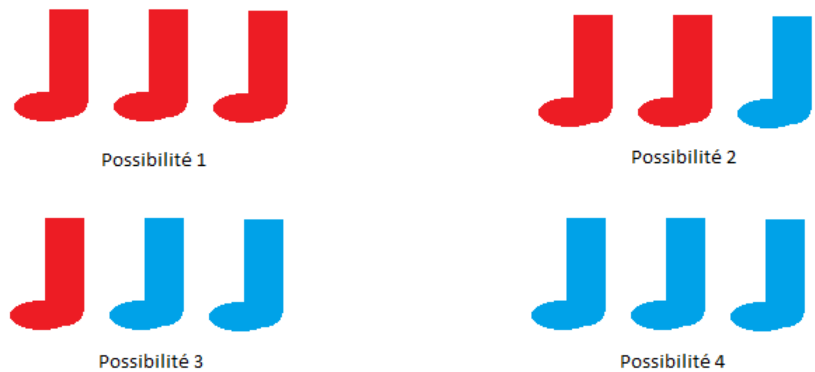


Figure 2. Tirage de trois chaussettes

Dans tous les cas, Alex dispose d'une paire de chaussettes monochrome : dans les cas 1 et 2 d'une paire rouge et dans les cas 3 et 4 d'une paire bleue.
Ainsi la solution de l'exercice est 3.

1.3. Une variation du problème

Supposons maintenant que la caisse de chaussettes contienne des chaussettes de trois conleurs différentes : rouges, bleues et vertes. Combien de chaussettes au minimum doit tirer Alex pour obtenir une paire monochrome ?

1.4. Une solution au nouveau problème

Raisonnons de manière analogue : que peut-il se passer si Alex tire trois chaussettes ?
La configuration suivant peut apparaître :

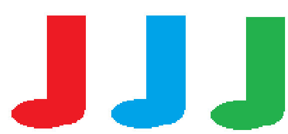


Figure 3. Un tirage possible de trois chaussettes

Ainsi, Alex doit tirer plus de quatre chaussettes.
Je vous laisse énumérer les différents tirages possibles de quatre chaussettes pour vous convaincre que, parmi quatre chaussettes, se trouvera toujours une paire monochrome.
La réponse est donc 4.

1.5. Une ultime variation

Supposons désormais qu'Alex n'appartient pas à l'espèce humaine, mais est un poulpe, et possède donc huit tentacules. Combien de chaussettes doit tirer Alex pour obtenir huit chaussettes de même couleur ?

1.6. Une solution supplémentaire

La méthode utilisée précédemment trouve dans cette variation ses limites.
Je peux l'utiliser pour vous montrer que tirer 21 chaussettes ne suffit pas :

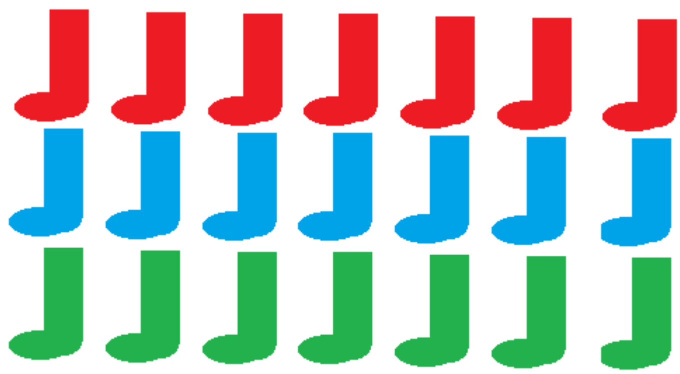


FIGURE 4. Un tirage possible de 21 chaussettes

En revanche, il serait cruel de ma part de vous demander de l'utiliser pour montrer que tirer 22 chaussettes permet d'obtenir 8 chaussettes de même couleur : il vous faudrait dessiner 6072 chaussettes ! Pour résoudre correctement ce problème, il nous faut donc utiliser une autre méthode : l'utilisation du principe des tiroirs.

2. L'énoncé du principe des tiroirs

Si l'on place n objets dans k tiroirs, alors un des tiroirs contient au moins $\frac{n}{k}$ objets.
Ce principe porte plusieurs noms, notamment principe des tiroirs, principe de Dirichlet ou encore pigeon hole principle dans la langue de Shakespeare.
Par exemple, si vous placez 3 objets dans deux tiroirs, un des tiroirs contiendra au moins $\frac{3}{2}$ objets. En utilisant le fait que le nombre d'objets dans un tiroir est entier, on obtient qu'un des tiroirs contient au moins deux objets :

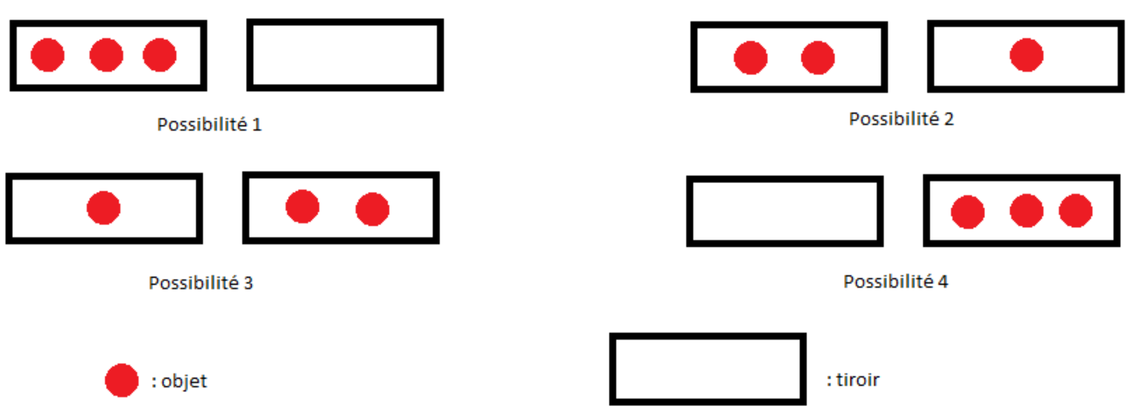


FIGURE 5. Illustration de l'exemple

Ce principe, très abstrait, peut être utilisé de manières diverses.
Pour l'utiliser, vous devez vous poser deux questions :

- Quels sont mes objets ?
- Quels sont mes tiroirs ?

3. Nouvelles solutions des problèmes d'approche expérimentale

3.1. Solution du premier problème

Appliquons la méthode décrite précédemment.
Je désire appliquer le principe des tiroirs.
Quels seront mes objets ? Les n chaussettes qu'Axel tire.
Quels seront mes tiroirs ? Les deux couleurs : rouge et bleu.
Le fait que les chaussettes soient rouges ou bleues se traduit par le fait que les chaussettes sont rangées dans le tiroir 'rouge' ou dans le tiroir 'bleu'.
On cherche à tirer n chaussettes, avec n aussi petit que possible, tel qu'un des deux tiroirs contienne au moins 2 chaussettes. Le principe des tiroirs nous dit que, si l'on tire 3 chaussettes, un des tiroirs contiendra au moins $\frac{3}{2}$ chaussettes. Le nombre de chaussettes par tiroir étant entier, un des tiroirs contient deux chaussettes : en tirant trois chaussettes, on obtient nécessairement une paire monochrome !
De plus, deux chaussettes ne suffisent pas pour trouver une paire monochrome.
La réponse au problème est donc 3.

3.2. Solution du deuxième problème

Raisonnons de manière identique.
Les objets sont les chaussettes, les tiroirs les couleurs.
Les objets sont en nombre inconnu n, les tiroirs sont au nombre de trois.
Je cherche n le plus petit possible tel qu'un tiroir au moins contienne 2 objets.
Le principe des tiroirs me garantit qu'un tiroir contiendra au moins $\dfrac{n}{3}$ objets.
Je cherche donc n le plus petit possible tel que :
$\lceil\dfrac{n}{3}\rceil \geq 2$
Où $\lceil x \rceil$ désigne la partie entière supérieure de x, c'est-à-dire le plus petit entier supérieur ou égal à x.
Alors, 4 est la solution, car $\lceil\dfrac{4}{3}\rceil = 2$ et $\lceil\dfrac{3}{3}\rceil = 1$, et 3 chaussettes ne suffisent pas pour obtenir une paire monochrome.

3.3. Solution du troisième problème

On a montré que 21 chaussettes ne suffisaient pas, car on peut alors en avoir 7 de chaque couleur exactement.
Utilisons le principe des tiroirs pour montrer que 22 chaussettes suffisent :
Les objets sont les chaussettes, et sont au nombre de 22.
Les tiroirs sont les couleurs, et sont au nombre de 3.
Alors, au moins un des tiroirs comporte $\lceil\dfrac{22}{3}\rceil = 8$ objets. Ainsi, 22 chaussettes suffisent pour trouver 8 chaussettes de la même couleur.
La réponse est 22.

4. Plus d'exercices sur le principe des tiroirs

4.1. Exercice 1 :

Camille possède 47 vaches, et veut acheter des abreuvoirs pour leur permettre de s'hydrater. Sachant qu'un abreuvoir permet à trois vaches d'assouvir leurs besoins en eau, combien d'abreuvoirs sont nécessaires pour permettre la survie du troupeau ?

4.2. Exercice 2 :

Dominique organise une soirée milk-shake. Le principe ? Les invités partagent des milk-shakes, et discutent entre eux. Sachant que Dominique participe à la soirée, que chaque milk-shake comporte 5 pailles, qu'on ne partage pas les pailles et que 22 milk-shakes sont prévus, combien d'invités y aura-t-il au maximum ?

4.3. Exercice 3 :

Un concours réunit 123 personnes, réparties dans 24 équipes.
Les organisateurs décident de limiter le nombre de personnes dans une méme équipe : quelle est la limite minimale qu'ils puissent fixer ?

4.4. Exercice 4

Combien de tours au maximum peut-on placer sur un échiquer de manière à ce que deux tours quelconques ne soient pas en prise ?
Même question avec des fous.
Si vous ne connaissez pas les règles des échecs, renseignez-vous, par exemple sur le site Wikipédia.

5. Solutions

5.1. Solution à l'exercice 1 :

Appliquons le principe des tiroirs, avec les 47 vaches comme objets et les n abreuvoirs comme tiroirs.
On sait qu'un tiroir contient au moins $\lceil \frac{47}{n} \rceil$, et on veut que cette quantité soit plus petite que 3.
Alors 16 est la réponse car $\lceil \frac{47}{16} \rceil = 3$ et $\lceil \frac{47}{15} \rceil = 4$, et avec 16 abreuvoirs, on peut mettre 3 vaches autour de chacun des 15 premiers abreuvoirs et 2 autour du dernier.

5.2. Solution à l'exercice 2 :

Appliquons le principe des tiroirs, avec les $n+1$ personnes présentes pour objets et les milk-shakes pour tiroirs, où n désigne le nombre d'invités. On cherche alors n le plus grand possible tel que $\lceil \frac{n+1}{22} \rceil \leq 5$.
On trouve alors $n = 109$.

5.3. Solution à l'exercice 3 :

Appliquons le principe des tiroirs, avec les 123 personnes pour objets, et les 24 équipes pour tiroirs.
Une équipe contiendra alors au moins $\lceil \frac{123}{24} \rceil = 6$ personnes, la plus petite limite envisageable est donc 6.

5.4. Solution à l'exercice 4 :

Pour les tours : appliquons le principe des tiroirs, avec les tours pour objets et les 8 colonnes de l'échiquier pour tiroirs.
On observe que deux tours situées dans la même colonne sont en prise.
Ainsi, par le principe des tiroirs, il ne peut y avoir plus de 8 tours sur le terrain n'étant pas en prise les unes avec les autres.

De plus, la configuration suivante permet à 8 tours de respecter l'énoncé :

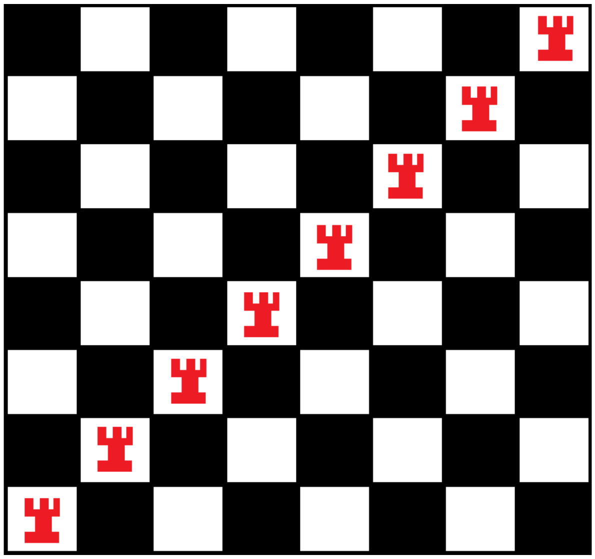


Figure 6. Configuration des tours

Ainsi la réponse est 8.

Pour les fous : appliquons le principe des tiroirs avec pour objet les fours et pour tiroirs les 14 ensembles de cases de même numéro :

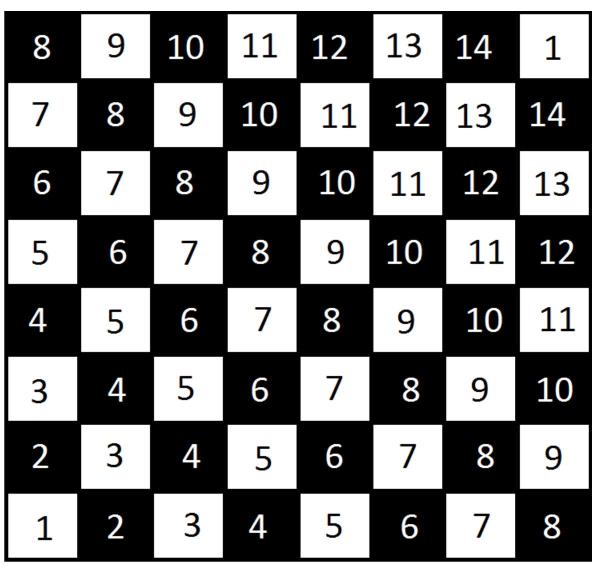


Figure 7. Choix des tiroirs

En remarquant que si deux fous sont sur une case de même numéro, alors ils sont en prise, on conclut par le principe des tiroirs qu'il y a au plus 14 fous sur le plateau.
La configuration suivante montre que 14 fous peuvent être disposés sans être en prise les uns avec les autres :

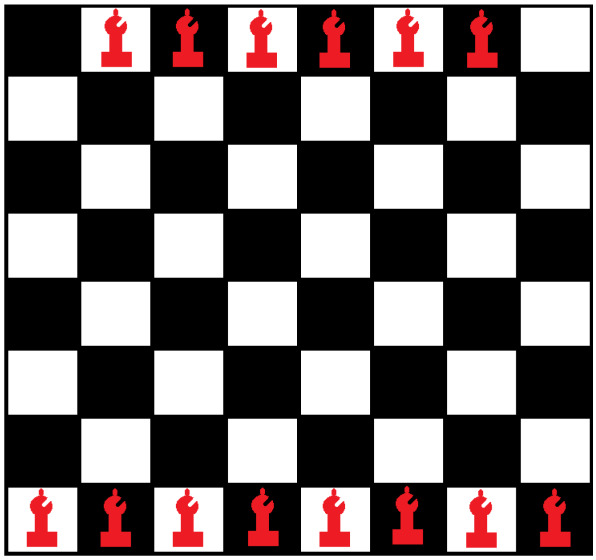


Figure 8. Configuration des fous

Ainsi la réponse est 14.

6. Un problème tombé aux Olympiades

Voici maintenant un problème olympique qui fait appel au principe des tiroirs.
Exercice résolu : (IMO 2001, problème 4)

Soient $n_1, n_2, \ldots, n_m$ des entiers, et m un entier impair différent de 1.
On notera $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ la permutation de $1, 2, \ldots, m$ qui à tout entier i associe x_i.
Si x est une permutation, on définit :

$$S(x) = n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_mx_m$$

Montrez qu'il existe deux permutations distinctes a et b telles que $m!$ divise $S(a) - S(b)$.

Solution

Raisonnons par l'absurde : supposons que si a et b sont deux permutations différentes quelconques, $m!$ ne divise pas $S(a) - S(b)$.
Alors, par le principe des tiroirs, comme il existe $m!$ permutations différentes, et $m!$ classes de congruences modulo $m!$, à chaque permutation est associée de manière unique une classe de congruence modulo $m!$.
Ainsi :

$$K \equiv 0 + 1 + \ldots + (m! - 1) \pmod{m!}$$

Où K désigne la somme des $S(x)$ pour toutes les permutations x.
Or :

$$\begin{aligned} K &\equiv n_1((m-1)!)(1+2+\ldots+m)+\ldots+n_m((m-1)!)(1+2+\ldots+m) \pmod{m!} \\ &\equiv \frac{m+1}{2}(n_1+\ldots+n_m)m! \pmod{m!} \\ &\equiv 0 \pmod{m!} \end{aligned}$$

Car $m+1$ est pair.
De plus :

$$0+1+\ldots+(m!-1) \equiv \frac{m!(m!-1)}{2} \pmod{m!}$$

Or $m!-1$ est impair, donc $v_2(\frac{m!(m!-1)}{2}) < v_2(m!)$.
Donc $0 \neq 0 \pmod{m!}$: impossible !

Vol. 1, No. 2, 2017, pp. 16–24

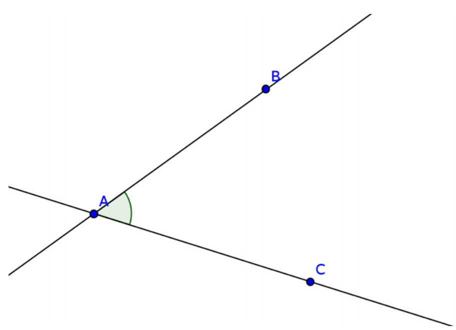
GÉOMÉTRIE – Géométrie du triangle 1

Aadil Oufkir

La géométrie euclidienne est le domaine des mathématiques s'intéressant notamment aux figures dans le plan. Elle est présente à chaque édition des Olympiades Internationales de Mathématiques, où elle constitue le thème d'un ou deux problèmes parmi les six posés aux épreuves. De ce fait, on lui donnera une importance particulière dans le journal. Pour ce premier cours de géométrie, on rappelle une série de notions élémentaires : angles, cercles et triangles. L'article fournit donc principalement une liste de théorèmes utiles. Le lecteur est invité à chercher les démonstrations des propositions du cours avant d'attaquer les exercices résolus.

1. Angles

Définition 1. *Un angle est une portion du plan délimitée par deux demi-droites issues du même point.*

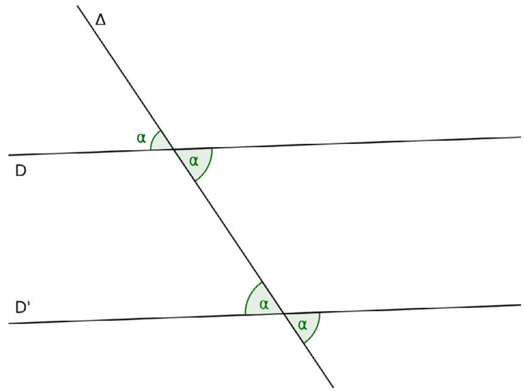


L'angle ci-dessus est noté $\widehat{BAC}$ *ou* $\measuredangle BAC$*. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on le note aussi* $\widehat{A}$ *ou* $\measuredangle A$*.*

1.1. Propriétés

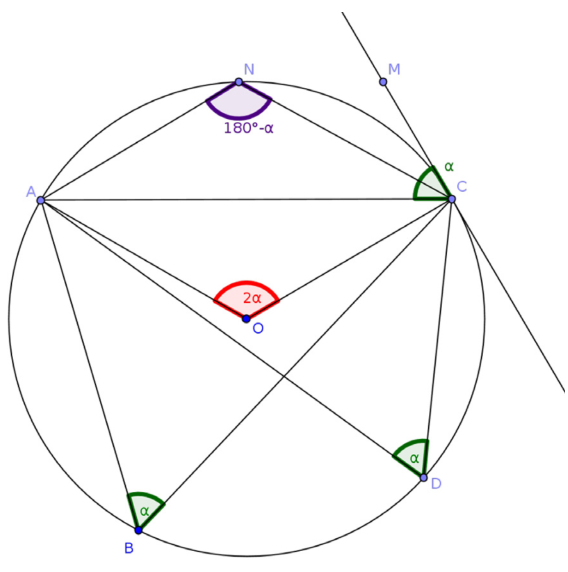
Ces propriétés sont utiles pour réaliser une « chasse aux angles », c'est-à-dire déterminer le plus d'angles possibles sur une figure donnée.

- Soient (D) et (D') deux droites parallèles. Soit $(\triangle)$ une droite sécante avec (D) et (D'). Les quatre angles indiqués ci-dessous sont égaux.



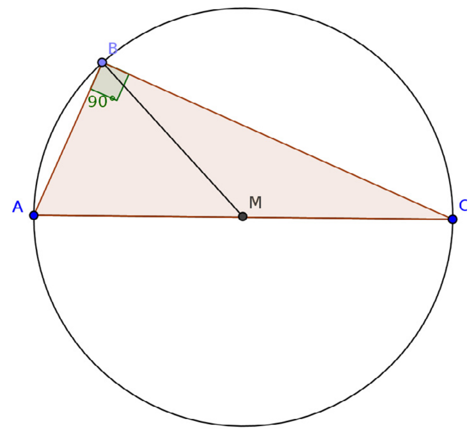
- Soit ABC un triangle. On a $\measuredangle BAC + \measuredangle ACB + \measuredangle CBA = 180°$
- **Théorème de l'angle inscrit.**
  Soit un cercle Π de centre O. Soient A, B, C, D et N des points du cercle (voir figure). Si (MC) est tangente au cercle au point C, on a les égalités :

$$\alpha = \measuredangle ABC = \measuredangle ADC = \measuredangle NCM = \frac{1}{2}\measuredangle AOC = 180° - \measuredangle ANC$$



  En particulier, $\measuredangle ABC$ ne dépend pas du point B du cercle.
- Soit ABC un triangle et M le milieu de $[AC]$. On a la propriété suivante :

$$\measuredangle ABC = 90° \iff MA = MB = MC$$

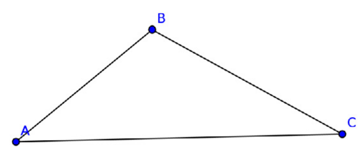


2. Triangles

Définition 2. *Un triangle est la donnée de trois points non alignés.*

2.1. L'inégalité triangulaire

Proposition 1. Soient A, B et C trois points du plan. Alors : on a $AB + BC \geq AC$ avec égalité si, et seulement, si $B \in [AC]$. Le nom d'inégalité triangulaire provient de l'interprétation géométrique immédiate, en considérant le triangle ABC.

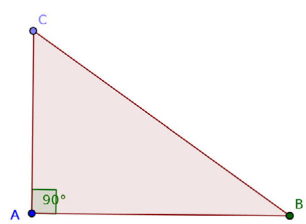


2.2. Le théorème de Pythagore

Théorème 1. *Soit ABC un triangle rectangle en A, c'est-à-dire tel que $\measuredangle BAC = 90°$. Alors :*

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

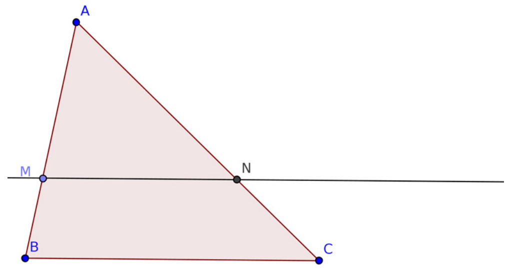
En particulier : $BC \geq \max(AB, AC)$

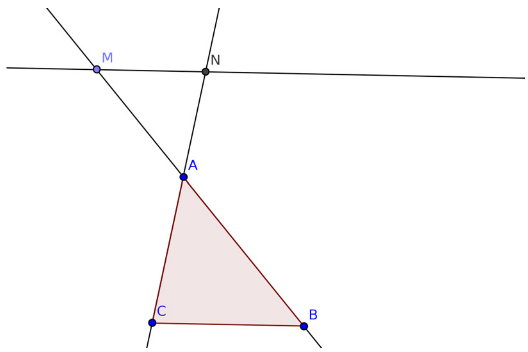


2.3. Le théorème de Thalès

Théorème 2. *Soit ABC un triangle. Soit M (resp. N) un point de (AB) (resp. (AC)). Alors :*

$$(MN)//(BC) \Longleftrightarrow \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



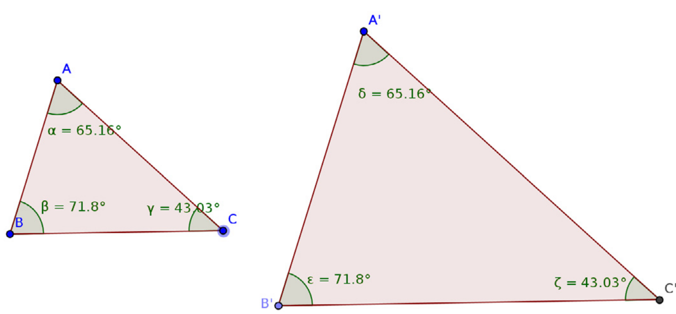


Signalons que ces deux théorèmes sont importants pour montrer que deux droites sont perpendiculaires (Pythagore) ou parallèles (Thalès).

2.4. Triangles semblables

Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles.

Définition 3. *On dit que ABC et $A'B'C'$ sont semblables si $\measuredangle A = \measuredangle A'$, $\measuredangle B = \measuredangle B'$ et $\measuredangle C = \measuredangle C'$. Précisons qu'on respecte ici l'ordre des sommets des triangles : ABC et BCA ne sont pas semblables en général.*



On peut caractériser les triangles semblables à partir des rapports des longueurs de leurs côtés :

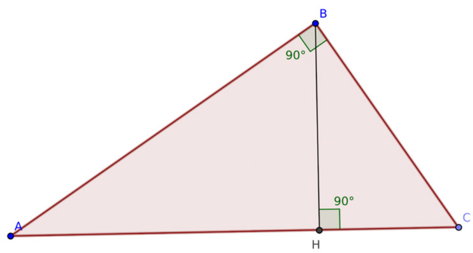
Proposition 2. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- ABC et $A'B'C'$ sont semblables
- $\measuredangle A = \measuredangle A'$, $\measuredangle B = \measuredangle B'$ et $\measuredangle C = \measuredangle C'$
- $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'}$
- $\dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'}$ et $\measuredangle A = \measuredangle A'$

2.5. Le lemme d'Euclide

Lemme 1. *Soit ABC un triangle rectangle en A. Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC), c'est-à-dire l'unique point appartenant à (BC) tel que $(AH) \perp (BC)$. Alors :*

- $BH.HC = AH^2$
- $BH.BC = AB^2$
- $CH.CB = CA^2$



3. Droites remarquables

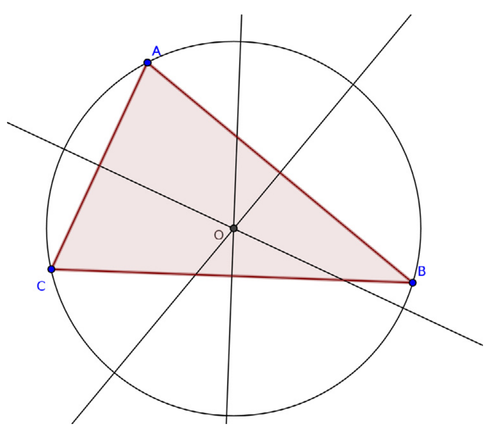
Dans un triangle, on peut définir plusieurs points et droites remarquables[1] présentant des propriétés particulières. On s'intéresse ici aux quatre droites les plus importantes. On fixe dans cette section un triangle ABC.

3.1. Médiatrice

Définition 4. La médiatrice d'un segment $[AB]$ est la perpendiculaire à (AB) passante par le milieu de $[AB]$.

On peut montrer que la médiatrice de $[AB]$ est l'ensemble des points équidistants de A et B, *i.e.* l'ensemble des points M tels que $MA = MB$.

Proposition 3. Les médiatrices de $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$ se rencontrent en un seul point, appelé le centre du cercle circonscrit à ABC. Ce point, souvent noté O, vérifie $OA = OB = OC$. Autrement dit, O est le centre d'un cercle qui passe par les sommets du triangle ABC.

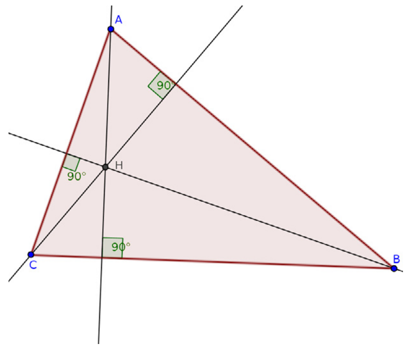


[1] Les lecteurs anglophones les plus courageux pourront approfondir le sujet ici : http://mathworld.wolfram.com/TriangleCenter.html

3.2. Hauteur

Définition 5. *La hauteur issue de A est la perpendiculaire à (BC) passant par A.*

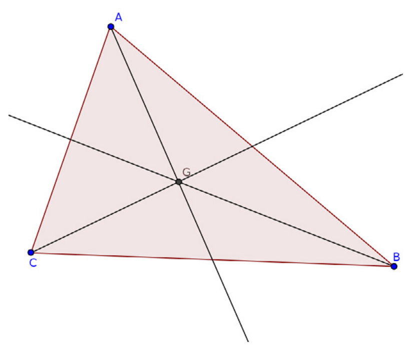
Proposition 4. Les trois hauteurs du triangle ABC se rencontrent en un seul point, appelé l'orthocentre, souvent noté H.



3.3. Médiane

Définition 6. *La médiane issue de A est la droite qui relie A et le milieu de $[BC]$.*

Proposition 5. Les trois médianes du triangle se rencontrent en un seul point, appelé le centre de gravité, souvent noté G.

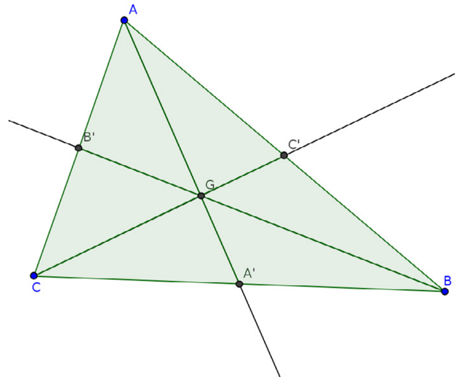


Proposition 6. Si A', B' et C' sont les milieux de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement, on a :

- $AG = \frac{2}{3}AA'$
- $BG = \frac{2}{3}BB'$
- $CG = \frac{2}{3}CC'$

De plus, si $S(\mathcal{T})$ désigne l'aire du triangle $\mathcal{T}$, on a :

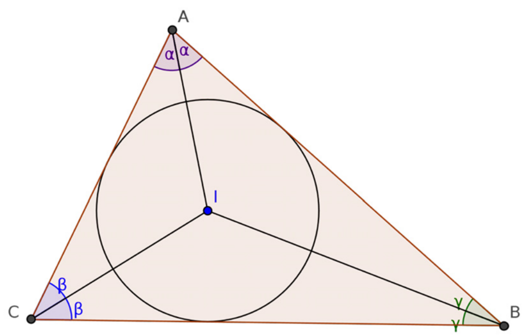
$$S(AGB') = S(B'GC) = S(CGA') = S(A'GB) = S(BGC') = S(C'GA)$$



3.4. Bissectrice

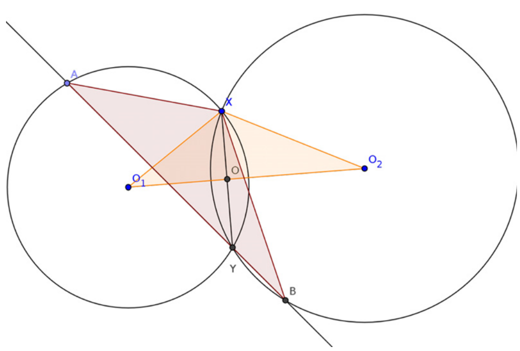
Définition 7. La bissectrice d'un angle est la demi-droite qui le partage en deux angles de même mesure.

Proposition 7. Les bissectrices de $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ se rencontrent en un point, appelé le centre du cercle inscrit à ABC, souvent noté I.
La dénomination de « cercle inscrit » provient du fait que I est le centre de l'unique cercle tangent à tous les côtés du triangle ABC. Ce cercle est naturellement appelé cercle inscrit à ABC.



4. Exercices

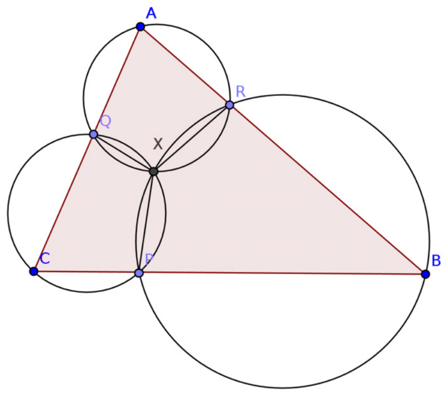
1. Soient Γ_1, Γ_2 deux cercles de centres respectifs O_1 et O_2, s'intersectant en X et Y. Soit A un point de Γ_1. Soit B l'intersection de (AY) et Γ_2.
Montrer que XO_1O_2 et XAB sont semblables.
Solution.



On pose $O = I_1O_2 \cap XY$. Comme $O_2X = O_2Y$ et $O_1X = O_1Y$, on a que (O_1O_2) est la médiatrice de $[XY]$.

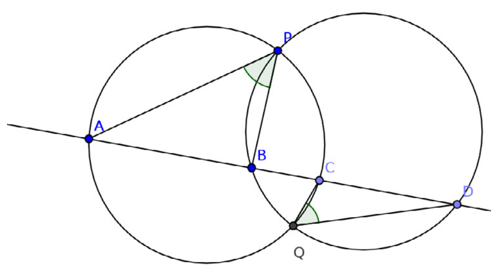
Alors $\measuredangle XO_2O_1 = \frac{1}{2}\measuredangle XO_2Y = \measuredangle XBY = \measuredangle XBA$. De même, on montre que $\measuredangle XO_1O_2 = \frac{1}{2}\measuredangle XO_1Y = \measuredangle XAY = \measuredangle XAB$. Donc les triangles XO_1O_2 et XAB sont semblables.

2. Soient ABC un triangle, P un point de $[BC]$, Q un point de $[CA]$, R un point de $[AB]$. Soit X la seconde intersection des cercles circonscrits à AQR et à BRP.
Montrer que X appartient au cercle circonscrit à CPQ.
Solution.



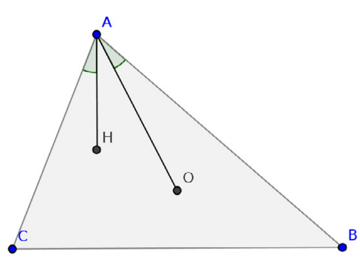
Pour montrer que X appartient au cercle circonscrit à CPQ, il suffit de montrer que $\measuredangle QXP = \pi - \measuredangle QCP$. Or $\measuredangle QXP = 2\pi - \measuredangle QSR - \measuredangle RXP = (\pi - \measuredangle QSR) + (\pi - \measuredangle RXP) = \measuredangle QAR + \measuredangle RBP = \pi - \measuredangle ACB = \pi - \measuredangle QCP$ On obtient bien le résultat voulu.

3. Soient Γ_1, Γ_2 deux cercles ayant deux points d'intersection P et Q. Une droite coupe Γ_1 en A et C et Γ_2 en B et D. Les points A, B, C et D sont alignés dans cet ordre.
Montrer que $\measuredangle APB = \measuredangle CQD$
Solution.



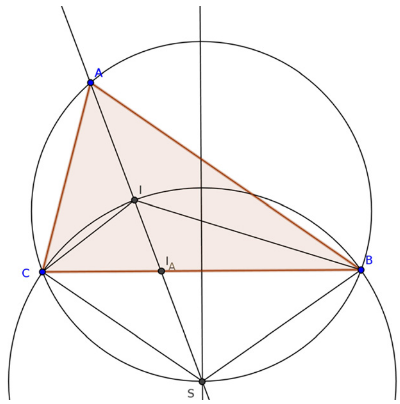
Une simple chasse aux angles permet de conclure. En effet $\measuredangle APB = \pi - \measuredangle PBA - \measuredangle PAB = \measuredangle PBD - \measuredangle PAC = \measuredangle PQD - \measuredangle PQC = \measuredangle CQD$

4. Soient ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit et H son orthocentre.
Montrer que $\measuredangle BAO = \measuredangle CAH$.
Solution.



O est le centre du cercle circonscrit de ABC donc $OA = OB$ et OAB est isocèle en O, *i.e.* $\measuredangle OAB = \measuredangle OBA$. Si on note A' le pied de la hauteur issue de A on a : $\measuredangle BAO = \measuredangle ABO = \frac{1}{2}(\measuredangle BAO + \measuredangle ABO) = \frac{1}{2}(\pi - \measuredangle AOB) = \frac{1}{2}(\pi - 2\measuredangle ACB) = \pi/2 - \measuredangle ACA' = \measuredangle CAH$

5. Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit. Soit I le centre du cercle inscrit, I_A le pied de la bissectrice issue de A et S le point d'intersection de cette bissectrice et de Γ.
   Montrer que S appartient à la bissectrice de $[BC]$.
   Montrer que $BS = CS = IS$.
   Montrer que les triangles ABS et BI_AS sont semblables.
   Solution.

   On a $\measuredangle CBS = \measuredangle CAS = \measuredangle BAS = \measuredangle BCS$ donc SBC est isocèle en S donc $SB = SC$, donc S appartient à la médiatrice de $[BC]$.
   Le deuxième point est équivalent à montrer que I appartient au cercle de centre S et de rayon $SB = SC$, et c'est aussi équivalent par le théorème de l'angle inscrit (voir 1.1 propriété 3) à $\measuredangle CSB = 2(\pi - \measuredangle CIB)$.
   Montrons cette dernière proposition. $2(\pi - \measuredangle CIB) = 2(\measuredangle IBC + \measuredangle ICB) = \measuredangle ABC + \measuredangle ACB = \pi - \measuredangle CAB = \measuredangle CSB$.
   Pour montrer que les triangles ABS et BI_AS sont semblables, il suffit de remarquer que $\measuredangle SAB = \measuredangle SAC = \measuredangle SBC = \measuredangle SBI_A$ et $\measuredangle ASB = \measuredangle BSI_A$.

Vol. 1, No. 2, 2017, pp. 25–28

La beauté des Mathématiques : la conjecture de Goldbach

Mouad Moutaoukil

Introduction à la beauté des mathématiques

La beauté des mathématiques, science communément considérée comme étant opposée à l'art, est en fait très similaire à la beauté de l'art visuel et musical. En effet, pour le philosophe Platon, la qualité d'abstraction des mathématiques représenterait la forme la plus élevée de beauté. Pour le mathématicien Bertrand RUSSELL, la beauté mathématique est « froide et austère, comme celle d'une sculpture sans référence à quelque partie de notre nature fragile, sans les magnifiques illusions de la peinture ou de la musique, et pourtant pure et sublime, capable d'une stricte perfection que seuls les plus grands arts peuvent montrer. »[1]

Le neurobiologiste Semir Zeki confirme l'hypothèse heuristique ; en utilisant l'IRM, il montre que le cerveau d'un amateur de mathématiques réagit à certaines formules ou théorèmes, comme réagirait celui d'un artiste à un tableau de peinture, ou un morceau de musique.[2]

Certains problèmes mathématiques, comme celui des partitions que nous avons discuté au premier numéro, s'énoncent très simplement alors qu'ils sont en réalité très difficiles. Cette simplicité d'énonciation est un critère de beauté mathématique. La conjecture de GOLDBACH (Christian 1690-1764) est sans conteste l'un des problèmes les plus beaux dans ce sens.

Les problèmes de Landau

Les problèmes de LANDAU sont quatre problèmes à propos des nombres premiers qu'Edmund LANDAU (1877-1938) présenta lors du congrès international des mathématiciens de 1912 à Cambridge. À ce jour, ils ne sont pas résolus. Ces problèmes furent caractérisés dans son discours comme étant « inattaquables dans l'état actuel des connaissances » :

1. La conjecture de GOLDBACH, qui énonce que **tout entier pair strictement supérieur à 2 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers**.
2. La conjecture des nombres premiers jumeaux, qui énonce qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels que p + 2 est premier.

[1] B. Russell, Mysticism and Logic and Other Essays, Londres, Longmans, Green, 1918, chap. 4 (« The Study of Mathematics »)

[2] http ://www.futura-sciences.com/sciences/actualites/mathematiques-mathematiciens-sont-artistes-irm-confirme-52372/

3. La conjecture de Legendre, qui énonce qu'il existe toujours au moins un nombre premier entre deux carrés parfaits consécutifs.
4. La conjecture qui énonce qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $n^2 + 1$.

Les nombres premiers ont toujours suscité la curiosité et l'attention des mathématiciens. C'est un secteur très actif des mathématiques contemporaines, puisqu'il regorge de résultats, formules, conjectures et théorèmes très séduisants. Le lecteur intéressé pourrait par exemple essayer de comprendre le crible – le principe est très simple – ci-dessous.

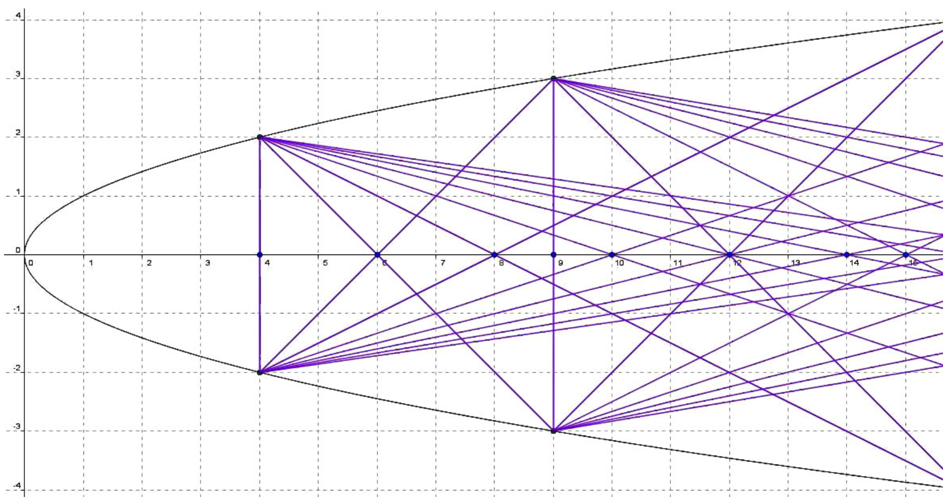


Figure 1. Crible géométrique de Matiassevitch (Iouri – médaille d'or aux OIM 1964)

La conjecture de Goldbach actuellement

La conjecture a été formulée pour la première fois dans une lettre de Goldbach à Euler en 1742. Elle est considérée aujourd'hui comme l'un des problèmes mathématiques les plus difficiles et les plus anciens. Elle n'a toujours pas été prouvée, puisque la grande majorité des mathématiciens pensent qu'elle est vraie ; en se basant sur des arguments statistiques heuristiques.

Elle a été vérifiée aux entiers jusqu'à 4×10^{18}.

Plusieurs théorèmes en rapport avec la conjecture ont été prouvés, nous citerons :

- *Il existe une constante k telle que tout entier pair est somme d'un nombre premier et d'un nombre ayant au plus k facteurs premiers.*
  1947 – Alfréd Rényi.
- *Il existe une constante k telle que tout entier pair assez grand est somme de deux nombres premiers et d'au plus k puissances de 2.*
  1951 – Yuri Linnick.
- *Tout entier pair est somme de six nombres premiers au plus.*
  1995 – Olivier Ramaré.
- *Tout entier impair* $\succ 1$ *est somme de cinq nombres premiers au plus.*
  2012 – Terence Tao.

Terence Tao, mathématicien d'exception, est le plus jeune participant aux Olympiades Internationales des Mathématiques à recevoir une médaille d'or (13 ans). Il avait participé successivement aux OIM 1986, 1987 et 1988. Nous proposons au lecteur intéressé un des problèmes qu'a confrontés Tao à propos des nombres premiers.

• **P6 1987**

Soit n un entier ≥ 2. Montrer que si k^2+k+n est premier pour tout k vérifiant $0 \leq k \leq \sqrt{n/3}$, alors k^2+k+n est premier pour tout k vérifiant $0 \leq k \leq n-2$.

Figure 2. Tao reçoit sa médaille d'or aux OIM 1988 (Image prise du site de l'IMOF)

Conclusion

Les nombres premiers ont toujours été fascinants car, en dépit de leur définition élémentaire, les problèmes que l'on peut se poser sur eux peuvent être très difficiles. Avant la conjecture de Goldbach et les trois autres problèmes de Landau, le comportement même des nombres premiers a constitué l'histoire d'un grand échec, une histoire qui a permis à de merveilleuses découvertes et à des liens inattendus de voir le jour.
La résolution de la conjecture de Goldbach -probablement dans un lointain futur- constituerait la fin d'une longue épopée. Une épopée loin d'être vaine car elle a été à l'origine du développement de techniques mathématiques très fines, notamment la théorie du crible, dont les champs d'applications sont vastes. Que cette conjecture résiste depuis si longtemps aux esprits les plus brillants laisse penser que de nouvelles idées sont nécessaires. Idées qui, si elles venaient à germer, jetteraient sans doute un nouvel éclairage sur les nombres premiers, que nous comprenons encore trop mal.

Correction du problème du numéro 1

Problème 4 IMO 1976

Déterminer le plus grand produit d'entiers positifs de somme 1976.

Solution
Soit $a_1, a_2, ..., a_n$ la suite d'entiers représentant la partition de 1976 réalisant un produit maximal.

On a bien évidemment $\sum a_i = 1976$. Le but est de retrouver la valeur de n ainsi que celles des a_i.

Tous les a_i sont inférieurs ou égaux à 4
En effet, s'il existe un i tel que $a_i \succ 4$ alors $3(a_i - 3) \succ a_i$, car on travaille sur des entiers. On peut donc remplacer le facteur a_i par le couple de facteurs 3 et $(a_i - 3)$ pour obtenir un produit supérieur à celui considéré, sans changer la somme puisque le terme $a_i = 3 + (a_i - 3)$. Ce qui contredit la maximalité de notre produit.
Le produit est donc constitué uniquement de 1, 2, 3 et 4. On peut remplacer les 4 par deux 2 sans altérer ni le produit ni la somme. D'où les a_i appartiennent à $\{1, 2, 3\}$.

Tous les a_i sont différents de 1
Si on suppose qu'il existe des 1 dans notre produit, leur nombre est nécessairement 1, car on peut toujours remplacer k 1 par k pour obtenir un produit plus grand.
Et puisque $1976 \equiv 2 (\text{mod} 3)$, il existe au moins un 2. On remplace alors notre 1 avec un 2 par 3, ce qui donnera un produit plus grand. D'où l'inexistence de 1 parmi les a_i.
Notre produit est composé uniquement de 2 et 3. Puisque on doit minimiser le nombre de 2 pour maximiser le produit, et puisque $1976 = 3 \times 658 + 2$,

$$a_1 = 2 \text{ et pour tout } 2 \leq i \leq 659,\ a_i = 3$$

Le produit recherché est donc bien évidemment égal à 2×3^{658}.

Vol. 1, No. 2, 2017, pp. 29–32

EXERCICES

Les élèves sélectionnés par le Ministère de l'Éducation Nationale pour préparer les Olympiades sont invités à nous envoyer les solutions aux problèmes suivants sur le site officiel de l'association Math&Maroc. Les traces de recherche, même si elles n'aboutissent pas à une solution complète, sont vivement appréciées et peuvent faire l'objet d'une correction.
Pour les autres lecteurs : les solutions élégantes sont bien sûr les bienvenues, même si leurs auteurs ne participent pas à la sélection des Olympiades. Ceux-là peuvent nous envoyer leurs résultats à l'adresse redac.mathetmaroc@gmail.com.
Toute proposition doit nous parvenir au plus tard le **17 mai 2017**. Les problèmes et les solutions seront publiés en français, mais vous pouvez soumettre vos solutions dans la langue de votre choix.

Géométrie

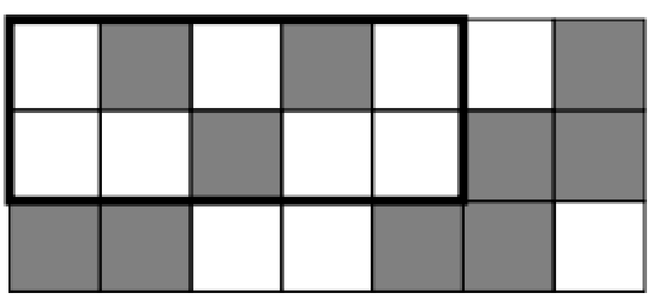
Exercice 7. Soit ABC un triangle. Soit D l'intersection de la bissectrice de $\measuredangle BAC$ et de $[BC]$. Montrer que $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$.

Exercice 8. Soit ABC un triangle et $\mathit{\Gamma}$ son cercle circonscrit. Soit P un point du plan. On note P_A, P_B et P_C ses projetés orthogonaux sur (BC), (CA) et (AB).
Montrer que P_A, P_B et P_C sont alignés si, et seulement, si $P \in \mathit{\Gamma}$.

Combinatoire

Exercice 9. Soit n un entier. Soit A un sous-ensemble de $\{1, \ldots, 2n\}$ contenant $n+1$ éléments.
Montrer qu'il existe $(p, q) \in A^2$ tels que $p \neq q$ et p divise q.

Exercice 10. Soit un rectangle de côtés 3 et 7, quadrillé en 21 carrés de côté 1. On colorie chaque carré en noir ou blanc.
Montrer qu'on peut trouver 4 petits carrés distincts de la même couleur, formant les coins d'un rectangle :



Divers

Exercice 11. Un biologiste dispose de 100 bouteilles d'eau, dont une empoisonnée. Il veut déterminer laquelle est empoisonnée en utilisant des rats de laboratoire. Le scientifique peut faire goûter à chaque rat le nombre de bouteilles qu'il veut. À la fin de l'expérience, les rats ayant bu de l'eau empoisonnée meurent.
Quel est le nombre minimal de rats dont le biologiste a besoin pour déterminer quelle bouteille est empoisonnée ?

Exercice 12. Soient $a, b, c > 0$. Montrer que :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Cette inégalité, très connue, s'appelle l'inégalité de Nesbitt.

Corrections des exercices du mois dernier

Inégalités

Exercice 1. Soient a, b et c des réels positifs tels que $a + b + c = 3$. Montrer que :

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 8$$

Solution : D'après l'inégalité arithmético-géométrique :

$$1 + \frac{1}{x} \geq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

pour tout $x > 0$, en particulier pour a, b et c. Il s'ensuit que

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq \frac{8}{\sqrt{abc}}$$

De plus, en appliquant l'inégalité encore une fois :

$$a + b + c \geq 3(abc)^{\frac{1}{3}}$$

Ainsi, $abc \leq 1$. La combinaison de ces résultats implique que

$$\left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right) \geq 8$$

C'est le résultat désiré. Le cas d'égalité a lieu lorsque $a = b = c = 1$. □

Exercice 2. Soient a, b et c des réels positifs tels que $abc = 1$. Montrer que :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq a + b + c$$

Solution : Remarquons que d'après l'inégalité arithmético-géométrique :

$$\frac{a}{b} + c \geq 2\sqrt{\frac{ac}{b}} = \frac{2}{b}$$

De même : $\frac{b}{c} + a \geq \frac{2}{c}$ et $\frac{c}{a} + b \geq \frac{2}{a}$.
En faisant la somme de ces trois inégalités, on trouve que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) - (a + b + c) \tag{0.1}$$

D'une manière similaire, on peut appliquer l'inégalité arithmético-géométrique comme suit :

$$\frac{a}{b} + \frac{1}{c} \geq 2\sqrt{\frac{a}{bc}} = 2a$$

On en déduit que

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 2(a+b+c) - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \tag{0.2}$$

On peut alors obtenir l'inégalité désirée en considérant $(1) + 2(2)$. L'égalité a lieu quand $a = b = c = 1$. $\square$

Arithmétique

Exercice 3.

1. Montrer que si x et y sont différents de 1, alors $x^4 + 4y^4$ n'est pas premier.
2. Montrer que si $n > 1$, alors $n^4 + 4^n$ n'est pas premier.

Solution :

1. Pour résoudre cet exercice, une bonne maîtrise des identités remarquables est primordiale !

$$\begin{aligned} x^4 + 4y^4 &= x^4 + 4x^2y^2 + 4y^4 - 4x^2y^2 \\ &= (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2 \\ &= (x^2 + 2y^2 - 2xy)(x^2 + 2y^2 + 2xy) \\ &= ((x+y)^2 + y)((x-y)^2 + y) \end{aligned}$$

   Enfin, on remarque que lorsque x est différent de y, les deux termes sont différents et strictement plus grands que 1 ce qui nous donne le résultat.
   Remarque : Cette identité s'appelle *identité de Sophie Germain* et il est important de la connaître.
2. Lorsque n est pair, le résultat est immédiat. Il faut donc traiter le cas n impair. On pose donc $n = 2k+1$ pour $k > 0$. On obtient :

$$\begin{aligned} n^4 + 4^n &= n^4 + 4^{2k+1} \\ &= n^4 + 4 \times 4^{2k} \\ &= n^4 + 4 \times 2^{4k} \\ &= n^4 + 4 \times (2^k)^4 \end{aligned}$$

   On obtient donc une expression sous la forme $x^4 + 4y^4$ avec x et y différents de 1. D'après la question précédente, ce nombre n'est pas premier.

$\square$

Exercice 4. Montrer que pour tout nombre premier p : si $p \geq 5$ alors 24 divise $p^2 - 1$

Solution : Pour montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 24, il suffit de montrer que 8 et 3 divisent 24 (car 8 et 3 sont premiers entre eux).
On commence par remarquer que $p^2 - 1 = (p-1)(p+1)$.
Comme p est premier et supérieur à 5, on sait que p est impair. Par conséquent, $p-1$ et $p+1$ sont deux entiers pairs consécutifs. Donc l'un des deux est divisible par 2 et l'autre est divisible par 4. Donc 8 divise $p^2 - 1$.
On remarque aussi que $p-1$, p et $p+1$ sont trois entiers consécutifs. Donc l'un des trois est divisible par 3. Comme p est premier et supérieur à 5, on sait que 3 ne divise par p. Donc 3 divise l'un des deux autres. Donc 3 divise $p^2 - 1$. $\square$

Divers

Exercice 5. Soit M un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$ contenant au moins 2 éléments. On dit qu'une fonction f vérifie la propriété $\boldsymbol{P}$ si :

$$f : M \longrightarrow M$$

et s'il existe $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) = ax + b$$

1. Montrer qu'il existe au moins une fonction vérifiant la propriété $\boldsymbol{P}$.
2. Montrer qu'il y a au plus deux fonctions vérifiant la propriété $\boldsymbol{P}$.
3. Si M contient 2003 éléments dont la somme fait 0 et s'il existe deux fonctions vérifiant la propriété $\boldsymbol{P}$, montrer que $0 \in M$.

Solution :

1. Posons $f(x) = x$ pour tout $x \in M$.
2. Soit n le cardinal de M. Écrivons $M = \{x_1 < x_2 < \ldots < x_n\}$.
   Si $a > 0$ et si $f : x \mapsto ax + b$ vérifie la propriété P alors $ax_1 + b < ax_2 + b < \ldots < ax_n + b$ donc $f(x_1) < f(x_2) < \ldots < f(x_n)$. Or $f(x_i) \in M$ pour tout i dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ donc $f(x_i) = x_i$. D'où $(a-1)x_1 + b = 0 = (a-1)x_2 + b$ (possible car $n \geq 2$). Par conséquent, $(x_1 - x_2)(a - 1) = 0$ Or $x_1 \neq x_2$. Par conséquent $a = 1$ et il en découle que $b = 0$. Si $a < 0$, on obtient $f(x_n) < f(x_{n-1}) < \ldots < f(x_1)$ alors $f(x_i) = x_{n-i+1}$. On obtient par le même raisonnement que plus haut : $a(x_1 - x_n) = (x_n - x_1)$ Donc $a = -1$ et $b = x_1 + x_n$. Il existe donc au plus deux fonctions vérifiant la propriété P.
3. D'après les raisonnements précédents, nous pouvons poser $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = -x + b$ avec $b = x_1 + x_{2003}$. On a alors que $f_2(x_1) + \ldots + f_2(x_{2003}) = 0$ Donc $-(x_1 + \ldots + x_{2003}) + 2003b = 0$ D'où $2003b = 0$ et donc $b = 0$. Ainsi $f_2(x) = -x$. Or, $f_2(x_{1002}) = -x_{1002}$ et $f_2(x_{1002}) = x_{2003-1002+1} = x_{1002}$. Donc $x_{1002} = -x_{1002} = 0$.

$\square$

Exercice 6. Un entier $n \geq 2$ est dit académique si on peut répartir les entiers $1, \ldots, n$ en deux groupes disjoints S et P, de sorte que la somme des nombres du groupe S soit égale au produit des nombres du groupe P. Montrer que pour $n \geq 7$, n est académique.

Solution : Cet exercice est typique des problèmes où les exemples sont primordiaux ! Il faut faire des tests à la main pour comprendre ce qui se passe. Nous remarquons alors que dans le cas pair, en posant $n = 2p$, le groupe $P = \{1, p, 2p\}$ convient. Dans le cas impair, $P = \{1, p-1, 2p\}$ convient. Montrons que ce résultat est vrai pour tout $n \geq 7$.

On note $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. On remarque alors que si $p \geq 4$:

$$S_{2p} - 2p - p - 1 = 2p \times p \times 1$$

Et pour tout $p \geq 3$:

$$S_{2p+1} - 2p - (p-1) - 1 = 2p \times (p-1) \times 1$$

$\square$