

# MATHS & MAROC



## ACTUALITÉ

Le nouvel organigramme du parcours olympique national pour les mathématiques 2022/2023

## فلسفة الرياضيات

شذرات من تطور الرياضيات الكلاسيكية إلى غاية القرن 16

## APPLICATIONS DES MATHS

Graphes, Flots et football ...

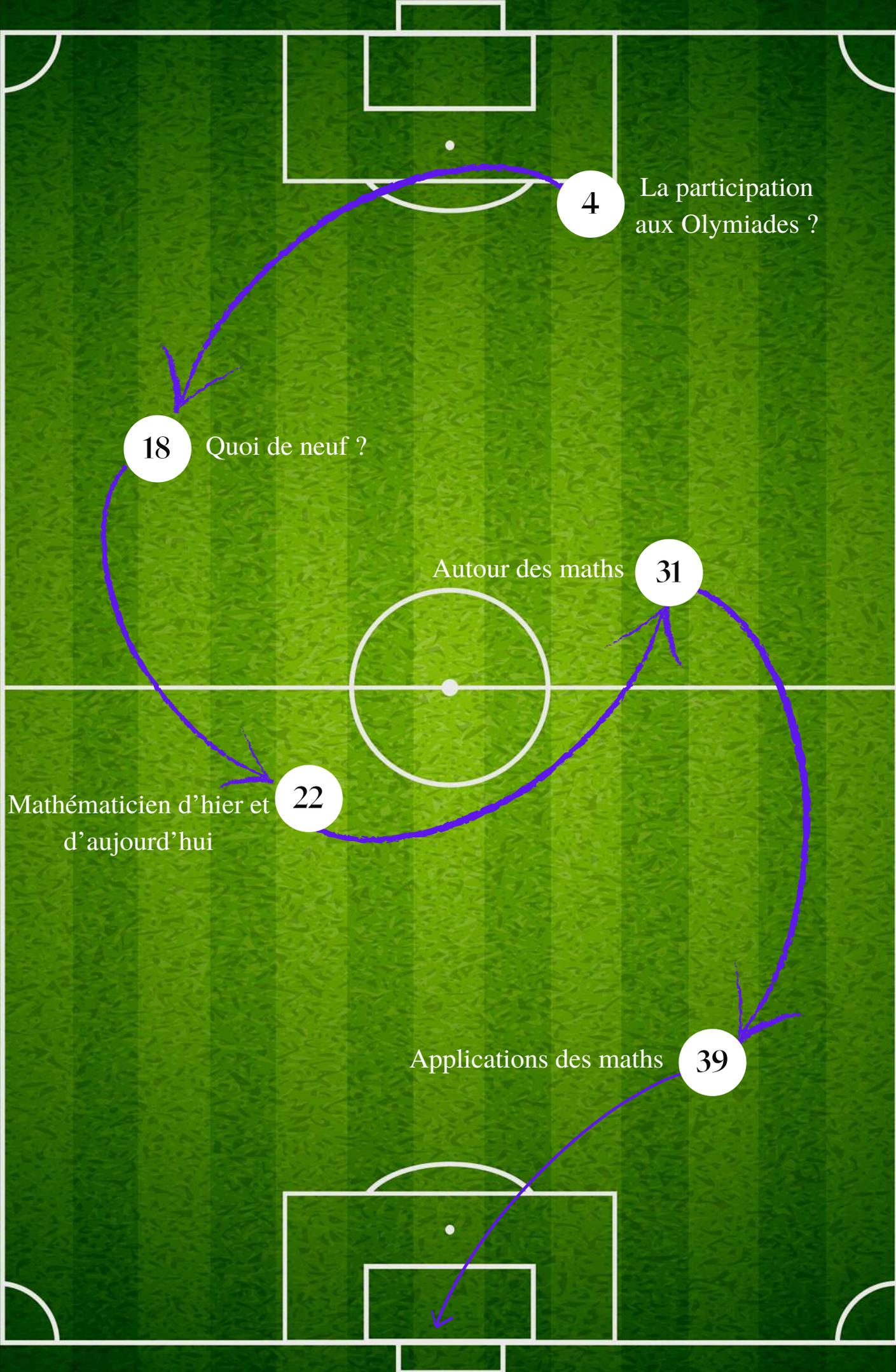
♦ ♦ ♦



"Nous devons changer notre état d'esprit. Pourquoi ne rêvons-nous pas de gagner la Coupe du monde?"

"Et on montre au monde entier que justement, dans la vie, c'est possible. Tu peux avoir moins de talent, tu peux avoir moins de qualité, tu peux avoir moins d'argent. Mais si t'as envie, si tu travailles, si tu te bases, si tu crois, Tu peux."

*WALID REGRAGUI*



4

La participation aux Olympiades ?

18

Quoi de neuf ?

Autour des maths

31

Mathématicien d'hier et d'aujourd'hui

22

Applications des maths

39



Dans un thème rappelant l'exploit marocain à la coupe du monde Qatar 2022, la nouvelle édition du journal de Math&maroc voit enfin le jour. C'est un numéro riche en contenu qui on espère sera un régal scientifique et mathématique pour nos lecteurs.

A l'occasion du nouvel an 2023, l'ensemble des membres de l'association vous souhaitent les meilleurs vœux !

Nouvel an, nouvelles résolutions, nouveaux projets et nouveaux partenariats : Math&maroc est toujours en expansion et ne cesse de discuter de nouveaux projets, nous avons également signé un partenariat avec Adria Business & Technology, restez branchés pour ne rien rater de ce que vous concoctent les différents pôles de l'association.

Pour ce numéro, vous pouvez découvrir un mathématicien de renom : Harald Bohr, ainsi que le témoignage de Ziad Oumzil qui a participé aux OIM en 2016 et a accompagné l'équipe nationale en 2019. Les rubriques « philosophie des maths » et « beauté des maths » vous présentent des sujets fort intéressants. Cette édition reparle de foot encore du point de vue des mathématiques, grâce à la rubrique « applications des maths » qui vous parlent également de mathématiques financières.

Bonne lecture.

*Mouad Moutaoukil*

## Mot du

M.

**Louafi SQUALLI**

Président de l'association Math&Maroc

Je commence mon propos en remerciant l'équipe nationale de football, oui de football! Je ne la remercie pas seulement pour nous avoir fait vibré de joie le temps d'une compétition -patriotisme oblige- mais surtout pour les messages qu'elle nous a transmis à travers celle-ci: Nous, marocains, pouvons monter sur le toit du monde!

La réalité est que, si on voit de plus près, ce n'est pas un résultat si unique en son genre que cela puisse paraître. Si on étale notre champs de vision à toutes les disciplines, et pour ne citer que quelques exemples récents qui me viennent à l'esprit, Soufiane El-Bakkali a remporté l'or mondial en athlétisme il y a très peu, et plus récemment Ziad Oumzil, entre autres, a remporté l'or mondial en mathématiques universitaires.

Le Maroc est en progression partout, et ce pour quoi nous pouvons/devons être reconnaissants aux footballeurs c'est que, à travers l'un des événements les plus médiatisés dans le monde, ils ont rendu cela visible à toute la nation, à toutes les nations!

Nous continuerons de notre côté de travailler, et nous sommes ravis d'annoncer qu'Adria B&T vient se joindre à nous pour la suite du chemin.

---

## Mot du

M.

**Rachid Bekkar**

Adria Business & Technology.

Les mathématiques ont une place primordiale dans notre société et sont à l'origine d'avancées majeures dans de nombreux domaines. L'informatique, par exemple, n'aurait jamais vu le jour sans les travaux fondateurs de quelques mathématiciens d'exception tels que JV. Neumann, A. Turing ou encore CE. Shannon.

Au-delà de son apport dans les sciences et la technologie, c'est aussi une discipline qui développe notre rationalité et notre esprit d'analyse. En effet, c'est grâce aux mathématiques que l'on apprend très jeunes à mieux aborder la complexité, poser les problèmes, structurer nos idées, affûter notre raisonnement et développer notre rigueur.

Passion pour les mathématiques, reconnaissance et souhait de servir notre pays, ambition et volonté de changer les choses, ce sont autant de valeurs communes avec l'association Math&Maroc, qui nous poussent à associer nos efforts dans un domaine qui nous passionne en espérant contribuer à sa promotion à l'échelle de notre pays.

Conscients que nos objectifs ont besoin de temps pour être réalisés, nous avons conclu un partenariat qui s'inscrit dans la durée avec un programme pluriannuel pour apporter notre modeste contribution aux efforts déjà déployés par d'autres acteurs.

Pour conclure, je tiens au nom de toute l'équipe Adria B&T à exprimer notre enthousiasme, notre conviction et notre mobilisation pour la conduite et la réussite de ce programme avec l'association Math&Maroc qui a montré sa crédibilité et son aptitude à porter ce type d'ambition.

Math&Maroc est une revue mathématique publiée par l'association du même nom. Elle vise la promotion des mathématiques, surtout olympiques, au Maroc.

Le Journal est ouvert à des propositions de nouveaux articles. Les articles doivent être soigneusement rédigés et raisonnablement courts. Nous vous invitons à nous envoyer tous vos commentaires, remarques, proposition d'article et suggestions en contactant notre VP publications à l'adresse suivante :

**[mathmaroc.publications@gmail.com](mailto:mathmaroc.publications@gmail.com)**

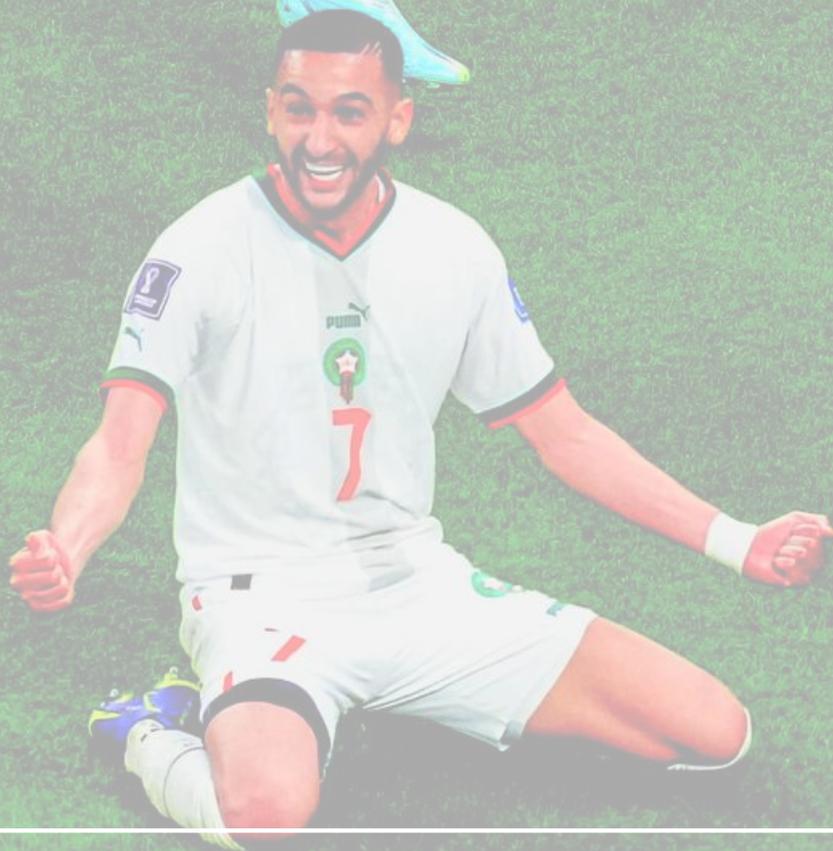
Un grand merci pour toutes les personnes qui ont contribué à la réalisation de cette édition de la revue Math&Maroc.

**Équipe de rédaction :**

- *Abdelkader Benaissat*
- *Ayoub Miguil*
- *Khaoula Saad*
- *Mouad Moutaoukil*
- *Marouane Ibn Brahim*
- *Ziad Oumzil*



## الهندسة الجديدة للمسار الأولمبي الوطني في مجال الرياضيات



# الهندسة الجديدة للمسار الأولمبي الوطني في مجال الرياضيات 2022/2023

## الأولمبياد الوطنية في الرياضيات ؟

الأولمبياد الوطنية في الرياضيات هي تظاهرة تربوية علمية سنوية، تنظم في مسار من ثلاث سنوات دراسية يختتم بتتظيم المباراة النهائية في يومين خلال الفترة ما بين شهري أبريل و ماي من كل سنة وفق أجندة المسابقات الدولية و العطل الدراسية، يشارك فيها نخبة من التلميذات و التلاميذ الذين برهنوا على تميزهم على مدى مسار الاعداد و الانتقاء طيلة المرحلة التأهيلية.

## الأولمبياد الوطنية في الرياضيات ؟

تمثل الأولمبياد الوطنية في الرياضيات الآلية التي يتم بواسطتها انتقاء أعضاء مختلف الفرق التي تمثل بلادنا في التظاهرات المثيلة على الصعيد الدولي، وذلك على الشكل التالي :

- الأولمبياد الدولية في الرياضيات اليابان 2023
- أولمبياد آسيا والمحيط الهادي في الرياضيات
- الأولمبياد المتوسطية في الرياضيات
- الأولمبياد الإفريقية في الرياضيات
- الأولمبياد الفرانكوفونية في الرياضيات
- أولمبياد البلقان في الرياضيات
- الأولمبياد العربية في الرياضيات
- البطولة المتوسطية للشباب في الرياضيات

\*من أجل الاطلاع على التفاصيل المرجو العودة لنص المذكرة 076X22

## المسار الأولمبي الوطني

ينقسم المسار الأولمبي الوطني في الرياضيات لمسارين أساسيين :

**مسار الأولمبياد الجهوية في الرياضيات** على صعيد السلك الإعدادي و **مسار الأولمبياد الوطنية** على صعيد السلك التأهيلي.

ينتظم **مسار الأولمبياد الوطنية** في الرياضيات في ثلاث مستويات (N1 , N2 , N3)، حيث يدوم كل مستوى من هذه المستويات الثلاث موسما دراسيا كاملا، يستفيد خلاله المتممون إليه من مجموعة من التكوينات والتقييمات.

**N3**  
NMa0

**المستوى N3**

و هو المستوى الأساسي حيث يضم التلميذات و التلاميذ المسجلين بمستوى الجذع المشترك العلمي، أو ما يقابله بالمؤسسات التابعة للبعثات الأجنبية، ويتم الولوج إليه بناء على نتائج أولمبياد الأشبال الوطنية أو الانتقاء الاستدراكي.

و هو المستوى المتوسط يضم التلميذات و التلاميذ الذين اجتازوا التقييم المبرمج عند نهاية المستوى N3 شريطة أن يكون التلميذ متقدما لمستوى السنة الأولى بكلوريا شعبة العلوم الرياضية، والملتحقين من خارج المسار الأولمبي الوطني في إطار الانتقاء الاستدراكي.

**المستوى N2**

**N2**  
NMa0

يمثل المستوى المتقدم و يضم التلاميذ الذين اجتازوا بنجاح التقييم المبرمج عند نهاية المستوى N2 و كذلك المتفوقين في المستوى N2.

**N1**  
NMa0

**المستوى N1**

## استثناءات

### الالتحاق بالمسار عبر الانتقاء الاستدراكي

يفتح باب الانتقاء الاستدراكي في وجه التلاميذ و التلميذات الذين لم يتمكنوا لسبب من الأسباب من ولوج مسار الأولمبياد الوطنية على المستوى N3 أو N2 و يتوفرون على مستوى متميز في الرياضيات الأولمبية. ويتم الانتقاء لولوج هذا المسار من خلال تنظيم تقويم نوعي يعتمد فيه اختباران اثنان :

- الاختبار الأول : يوم الجمعة 02 دجنبر 2022
- الاختبار الثاني : يوم الجمعة 03 فبراير 2023

يهم اختبار الالتحاق ب N3 التلاميذ و التلميذات المسجلين بمستوى الجذع المشترك العلمي، فيما يهم اختبار الالتحاق ب N2 التلاميذ و التلميذات المسجلين بالسنة أولى بكالوريا علوم رياضية.

### الانتقال الاستثنائي بين المستويات

يمكن للجنة العلمية للأولمبياد الوطنية في الرياضيات، أن تنظم تقويمات خاصة للتلاميذ الذين تسجل لديهم تفوقا ملحوظا خلال المستويين N3 و N2، يتيح تجاوزها للمعني الانتقال لمستوى أعلى.

أشعر بالملل في المستوى الحالي، هل يمكنني الانتقال لمستوى متقدم؟

إذا لم أستطع ولوج مسار الأولمبياد الوطنية خلال الجذع المشترك، هل يمكنني الاستدراك في السنة المقبلة؟

## الاتحاق بالمسار لتلاميذ البعثات الأجنبية

يمكن للتلاميذ و التلميذات المغاربة المسجلين بالمؤسسات التابعة للبعثات الأجنبية التعبير عن رغبتهم في ولوج المسار الأولمبي الوطني، حيث تجري عليهم نفس مسطرة الانتقاء المطبقة على نظرائهم الذين يتابعون دراستهم بمؤسسات التربية والتكوين الوطنية.

يرسل المعنيون بالأمر مطبوع طلب المشاركة عبر إدارة المؤسسة التي يدرس بها إلى الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين المتواجدة في نفوذها الإداري، حيث تقوم اللجنة الجهوية بإدراجهم ضمن لائحة المسموح لهم باجتياز الفرض الأول للانتقاء الاستدراكي.

هل يمكن للتلاميذ المغاربة المسجلين بمؤسسات البعثات الأجنبية المشاركة في المسار الوطني الأولمبي؟

ROYAUME DU MAROC

  
Ministère de l'Éducation Nationale,  
du Supplémentaire et des Sports

Annexe 2

**Imprimé de candidature pour l'accès au parcours  
des Olympiades Nationales de Mathématiques**

**Important :** Cet imprimé est destiné aux élèves marocains inscrits dans les filières scientifiques aux établissements de missions étrangères au Maroc désireux de concourir à l'accès au "parcours des olympiades nationales de mathématiques (NMaO)" selon les termes de la note ministérielle.

Nom- prénom : .....

الاسم والنسب: .....

Établissement : ..... N° d'inscription : .....

Classe : ..... Filière : .....

Email : ..... Téléphone : .....

1- Vos motivations de concourir pour l'accès au parcours olympique "NMaO" :  
.....  
.....

2- Avis du professeur de mathématiques :  
.....  
.....

Signature du candidat (e) : ..... Signature du professeur : .....

Date : .....

Signature et cachet du directeur de l'établissement : .....

10/10

Centre National d'Innovations Pédagogiques et de l'Expérimentation  
78, Avenue Moulay Elouadi, Marrakech - Maroc. Tél : 0537 76 76 11/0537 71 63 43. Fax : 0537 77 50 43 - email : cniep@maroc.gov.ma

## نموذج مطبوع طلب المشاركة

هل يمكن لأبناء الجالية المغربية بالخارج تمثيل  
المغرب في الأولمبياد الدولية في الرياضيات ؟

## مسطرة مشاركة أبناء الجالية المغربية بالخارج

يمكن للتلاميذ من أبناء المغاربة القاطنين خارج أرض الوطن تقديم طلب الترشيح من أجل المشاركة ضمن الفريق الذي يمثل بلادنا في الأولمبياد الدولية في الرياضيات، وذلك لكل تلميذة أو تلميذ يستوفي شرطي المشاركة، يتم العمل بالنسبة لهذه الفئة بالمسطرة التالية :

أ - الترشيح للأنشطة التأهيلية للأولمبياد الدولية في الرياضيات برسم سنة 2023 بالنسبة للتلاميذ الذين يدرسون بالمستوى الختامي أو ما قبل الختامي للمرحلة الثانوية. ويجب على المعني بالأمر الحصول على إحدى المراتب الأربعة الأولى في اختبار انتقاء الفريق (TST).

ب- الترشيح للأنشطة التأهيلية للأولمبياد الدولية في الرياضيات برسم سنة 2024 بالنسبة للتلاميذ الذين يدرسون بالمستوى ما قبل الختامي للمرحلة الثانوية. ويجب على المعني بالأمر المشاركة في التدريب التأطيري و التقويمي الذي سينظم في شهر يوليوز 2023، وفي حالة التأهل يخضع المعني بالأمر للتقويمات الدورية عن بعد التي تؤهله عند الاقتضاء في المشاركة في اختبار انتقاء الفريق (TST) و الحصول على إحدى الرتب الأربعة الأولى.

# الهندسة الجديدة لمسار الأولمبياد الوطنية في الرياضيات

المتفوقون في أولمبياد الأشبال الوطنية في الرياضيات

**N3**  
NMa0

المتفوقون في اختبار الاستدراك  
للمستوى N3

المتفوقون في الاختبارات النهائية للمستوى N3: الانتقال  
للمستوى الموالي مع امكانية المشاركة في تظاهرات دولية

**N2**  
NMa0

المتفوقون في اختبار الاستدراك  
للمستوى N2

المتفوقون في اختبارات الانتقال  
الاستثنائي

المتفوقون في الاختبارات النهائية للمستوى N2: الانتقال  
للمستوى الموالي والمشاركة في تظاهرات دولية

**N1**  
NMa0

المتفوقون في اختبار الانتقاء من أبناء  
المغاربة القاطنين بالخارج

المتفوقون في اختبارات الانتقال  
الاستثنائي

المتفوقون في الاختبارات النهائية للمستوى N1: التتويج في الأولمبياد  
الوطنية في الرياضيات و المشاركة في تظاهرات دولية



***Le nouvel organigramme du parcours  
olympique national pour les mathématiques  
2022/2023***

# Le nouvel organigramme du parcours olympique national pour les mathématiques 2022/2023

## L'Olympiade Nationale de Mathématiques ?

L'Olympiade Nationale de Mathématiques est une manifestation pédagogique scientifique annuelle organisée sur trois années académiques et se concluant par l'organisation de la sélection finale sur deux jours durant la période d'avril à mai de chaque année, dépendant de la programmation des compétitions internationales et des vacances scolaires. Les élèves qui prennent part à cette manifestation ont prouvé leur excellence au cours de la phase qualificative du parcours de préparation et de sélection.

## L'Olympiade Nationale de Mathématiques ?

L'Olympiade nationale de mathématiques représente le mécanisme par lequel les membres des équipes qui représentent notre pays dans les compétitions au niveau international sont sélectionnés, notamment :

- Olympiades internationales de mathématiques Japon 2023
- Olympiade Asie-Pacifique en mathématiques
- Olympiade Méditerranéenne de Mathématiques
- Olympiade Africaine de Mathématiques
- Olympiade francophone en mathématiques
- Olympiade des Balkans en mathématiques
- Olympiade arabe de mathématiques
- Championnat Méditerranéen des Jeunes en Mathématiques

\*Pour voir les détails, veuillez-vous référer au texte de la note ministérielle 076X22

## Le parcours olympique national

Le parcours olympique national en mathématiques est divisée en deux parcours principaux :

**Le parcours des Olympiades régionales de mathématiques** au niveau collégial et **le parcours des Olympiades nationales** au niveau secondaire.

**Le parcours des Olympiades nationales** de mathématiques est organisé en trois niveaux. Chacun de ces trois niveaux dure une année académique, durant laquelle les élèves sélectionnés bénéficient d'un ensemble de formations et d'évaluations.

**N3**  
NMa0

**NIVEAU N3**

C'est le niveau de base, il regroupe les élèves inscrit(e)s en tronc commun scientifique, ou son équivalent dans les établissements affiliés aux missions étrangères, et il est accessible en fonction des résultats de l'Olympiade nationale du collège ou par sélection de rattrapage.

C'est le niveau intermédiaire, et il regroupe les élèves ayant réussi l'évaluation programmée en fin du niveau N3, à condition que l'élève soit inscrit du en première année du baccalauréat en Sciences Mathématiques, en plus de ceux en dehors du parcours olympique nationale qui les rejoignent dans le cadre de la sélection de rattrapage.

**NIVEAU N2**

**N2**  
NMa0

**N1**  
NMa0

**NIVEAU N1**

Il représente le niveau avancé et regroupe les élèves ayant réussi l'évaluation programmée à la fin du niveau N2, ainsi que les élèves remarquables du niveau N2.

## Exeptions

Rejoindre le parcours olympique grâce à la sélection de rattrapage

La sélection de rattrapage est ouverte aux élèves qui, pour une raison quelconque, n'ont pas pu rejoindre dans le parcours de l'Olympiade nationale au niveau N3 ou N2 et ont un niveau distingué en mathématiques olympiques.

La sélection pour intégrer les Olympiades se fait par l'organisation d'une évaluation à travers deux tests :

- **Premier test : vendredi 02 décembre 2022**
- **Deuxième test : vendredi 03 février 2023**

L'épreuve d'inscription en N3 s'adresse aux élèves inscrits en tronc commun scientifique, tandis que l'épreuve d'inscription en N2 s'adresse aux élèves inscrits en première année baccalauréat en sciences mathématiques.

Transition exceptionnelle entre les niveaux

Le Comité Scientifique de l'Olympiade Nationale de Mathématiques peut organiser des évaluations particulières pour les élèves qui se sont distingué par leur excellence dans les niveaux N3 et N2, le donnant la possibilité de passer à un niveau supérieur.

## Les élèves marocains inscrits dans les établissements

Les élèves marocains inscrits dans des écoles de missions étrangères peuvent-ils participer au parcours des Olympiades nationales ?

Les élèves marocains inscrits dans les établissements affiliés aux missions étrangères peuvent exprimer leur désir d'intégrer la filière olympique nationale, étant soumis à la même procédure de sélection appliquée à leurs collègues qui poursuivent leurs études dans les établissements nationaux. L'intéressé envoie une copie imprimée de la demande de participation par l'intermédiaire de la direction de son établissement à l'académie régionale d'éducation située dans sa juridiction administrative. Le comité régional l'inclut par la suite dans la liste des élèves autorisés à passer les tests de la sélection de rattrapage.

ROYAUME DU MAROC

  
Ministère de l'Éducation Nationale,  
de l'Enseignement Supérieur et des Sports

ANNEXE 2

**Imprimé de candidature pour l'accès au parcours  
des Olympiades Nationales de Mathématiques**

**Important :** Cet imprimé est destiné aux élèves marocains inscrits dans les filières scientifiques aux établissements de missions étrangères au Maroc désireux de concourir à l'accès au "parcours des olympiades nationales de mathématiques (NMaO)" selon les termes de la note ministérielle.

Nom- prénom : .....  
الاسم والاسم

Établissement : ..... N° d'inscription : .....

Classe : ..... Filière : .....

Email : ..... Téléphone : .....

1- Vos motivations de concourir pour l'accès au parcours olympique "NMaO" :  
.....  
.....

2- Avis du professeur de mathématiques :  
.....  
.....

Signature du candidat (e) : ..... Signature du professeur : .....

Date : .....

Signature et cachet du directeur de l'établissement : .....

10/10

Centre National d'Innovations Pédagogiques et de l'Expérimentation  
78, Avenue Moulay Elouadi, Marrakech - Maroc - 30401 504 - 0537 76 76 14/0537 71 63 43 Fax : 0537 77 50 43 - email : cni@nmao.gov.ma

Imprimé de candidature

## Les marocains résidents à l'étranger

### Procédure de la participation des marocains résidents à l'étranger

Les élèves enfants des marocains résidents à l'étranger peuvent soumettre une demande afin de participer aux qualifications pour faire partie de l'équipe qui représente notre pays à l'Olympiade Internationale de Mathématiques :

A - Participation aux activités qualificatives aux Olympiades Internationales de Mathématiques pour l'année 2023 pour les élèves inscrits en terminale ou première bac du cycle secondaire. Le candidat doit obtenir l'une des quatre premières places au test de sélection d'équipe (TST).

B - Participation aux activités qualificatives aux Olympiades Internationales de Mathématiques pour l'année 2024 pour les élèves inscrits en première bac du cycle secondaire. Le concerné doit participer à la formation d'encadrement et d'évaluation qui sera organisée en juillet 2023, et en cas de qualification, le concerné sera soumis aux évaluations périodiques à distance qui le qualifient, le cas échéant, pour participer à l'épreuve de sélection de l'équipe ( TST) et obtenir l'un des quatre premiers rangs.

# Le nouvel organigramme du parcours olympique national

Olympiades nationales juniors en mathématiques

**N3**  
NMa0

Élèves sélectionnés au test de rattrapage N3

Élèves sélectionnés aux tests finaux de N3 : passage au niveau supérieur avec possibilité de participer à des compétitions internationales

Distingués dans les tests de transition exceptionnels

**N2**  
NMa0

Élèves sélectionnés au test de rattrapage N2

Tests finaux N2: passage au niveau supérieur et participation à des compétitions internationales

Élèves sélectionnés dans les tests de transition exceptionnels

**N1**  
NMa0

Les élèves sélectionnés parmi les enfants de Marocains résidant à l'étranger

Élèves sélectionnés aux tests finaux du niveau N1 : victoire aux Olympiades nationales de mathématiques et participation à des compétitions internationales (OIM)



*Actualités et infos*

# Quoi de neuf chez Math&maroc?

## **Adria et Math&Maroc : Nouveau partenariat, nouveaux projets**

Depuis sa création en 2016, l'association Math&Maroc s'est donnée comme objectif de promouvoir les mathématiques et les sciences fondamentales au Maroc, en œuvrant pour l'accompagnement des jeunes talents, l'aide à l'orientation, la formation de haut niveau et la vulgarisation pour le grand public. Aujourd'hui, après 6 ans de bons et loyaux services, nous avons le plaisir de vous annoncer que la famille s'agrandit et que nous travaillerons désormais main dans la main avec Adria Business & Technology. C'est donc avec une immense joie que nous collaborerons avec notre nouveau Partenaire Officiel Adria, pour notre objectif commun de promotion des mathématiques et des sciences avancées au Maroc.



Adria Business & Technology est une entreprise marocaine, spécialisée dans l'édition et l'intégration des solutions de transformation digitale (plate-forme de digital banking, confiance numérique,..). Plus de 70 banques dans 21 pays utilisent ses solutions. Adria Business & Technology est une entreprise ayant un fort engagement auprès de la jeunesse, des sciences et des activités intellectuelles.

Adria B&T est en particulier engagée dans la promotion des Mathématiques au Maroc. Dans ce sens, Adria B&T et Math&Maroc ont conclu un partenariat pluriannuel pour la réalisation de plusieurs projets à fort impact.

Nous tenons à exprimer, au nom de toute l'association, tout notre enthousiasme à l'idée de travailler avec Adria Business & Technology pour les années à venir. Ce partenaire de qualité vient s'ajouter à notre traditionnel et fondamental partenaire, le Ministère de l'Éducation Nationale, du Préscolaire et des Sports. Aujourd'hui, la famille s'agrandit, les compétences s'additionnent, le contenu se développe et les efforts s'intensifient. Seuls, notre but et notre raison d'être restent inchangés. Merci à Adria de nous faire confiance, merci au Ministère de continuer à nous faire confiance, ensemble nous réaliserons des choses grandioses.

## ET SI LES MATHS ET LE FOOT ÉTAIENT FAITS POUR S'ENTENDRE !



Les algorithmes s'invitent de plus en plus dans le monde du foot pour analyser le jeu, conseiller les entraîneurs en temps réel et même pour prédire les vainqueurs des tournois. L'IA est en train de prendre du terrain, c'est le cas de le dire.

Aujourd'hui, de grands clubs utilisent déjà l'analyse des données pour perfectionner les entraînements, c'est principalement le cas en Angleterre et en Espagne. C'est le FC Barcelone qui fait figure de pionnier et de précurseur, en signant un accord avec Pixellot, une entreprise spécialisée dans l'IA et l'analyse de vidéos pour les différents sports.

On retrouve aussi Liverpool qui s'est allié à Deepmind, pour permettre à cette filiale de Google d'accéder aux données de tous ses matchs disputés entre 2017 et 2019, un large gratin de données dont le but premier est d'améliorer les performances du club.



En France, ces technologies attisent la curiosité de tous, naturellement, mais ne sont toujours pas au point. Si Rennes s'y intéresse en particulier, c'est

clairement le PSG qui y investit le plus d'argent. Si le club a trouvé sa perle rare en attaque, c'est d'une star des algorithmes dont elle a besoin en ce moment. C'est ainsi que le club a organisé un large concours pour trouver cette personne qui saura faire trembler les claviers tout comme MBappé sait faire trembler les filets, le but étant d'aider l'entraîneur à prendre de meilleures décisions en tout temps.

Concrètement, on part d'une masse phénoménale de données sur l'intégralité des matchs d'une équipe donnée, lors de ces dernières années, récoltées par des capteurs ou trackers GPS dont sont équipés les joueurs. À partir de cela, l'IA sera capable de prédire comment tel ou tel joueur réagira dans une situation donnée. L'algorithme essaiera alors de trouver des récurrences, des éléments qui échappent à un œil humain même très aguerri, pour faire des suggestions. Pour ce faire, l'algorithme calcule des probabilités à partir de milliers de données sur chaque joueur, par exemple : son nombre de passes, à qui il donne le ballon majoritairement, vers quelle zone de jeu, ses dribbles, ses accélérations ... ceci permet de prédire l'état futur le plus plausible à partir d'un état présent, l'objectif est d'optimiser les performances et anticiper (pour mieux éviter) les blessures.

## COUPE DU MONDE 2022 : UNE ÉTUDE MATHÉMATIQUE PRÉDIT LE VAINQUEUR

La Coupe du monde 2022 au Qatar vient de commencer, mais il y a déjà une prédiction sur l'équipe favorite. Ainsi, Joachim Klemen, chercheur, mathématicien et écrivain d'origine anglaise, a mis en place une formule mathématique pour savoir qui sera consacré à la fin de la compétition. Selon Klemen, l'équipe argentine de Lionel Messi remportera la Coupe du monde 2022 au Qatar après avoir battu l'Angleterre en finale et l'Espagne en demi-finale. Pour lui donner les crédits qu'il mérite, cet homme a correctement prédit les champions des deux dernières coupes du monde, l'Allemagne et la France respectivement.

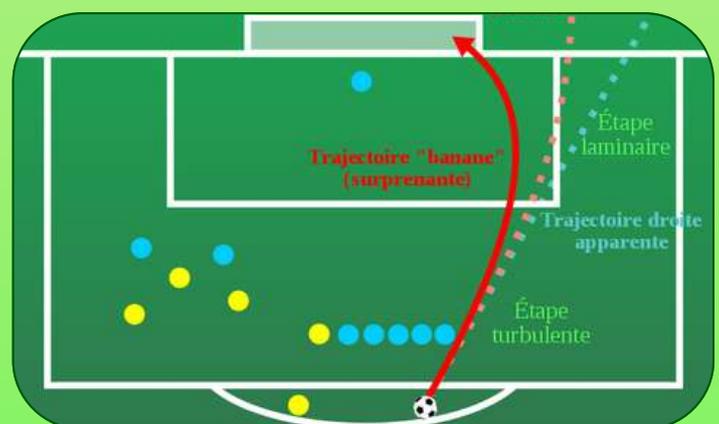
Bonne ou mauvaise nouvelle pour nos Lions ? Seul l'avenir nous le dira.

Comme dit le dicton, jamais deux sans trois, la prédiction de la Coupe du Monde 2022 sera-t-elle encore une fois juste ? Il est toutefois bon de savoir que les prédictions de Klement prennent non seulement en compte les performances de l'équipe, mais aussi des variables socio-économiques, notamment le PIB et la population du pays. Impressionnant non ?

### L'EFFET MAGNUS DANS LE FOOTBALL

L'effet Magnus génère une courbe sur le ballon de football pendant le mouvement. Lorsque le ballon tourne dans l'air, la force de frottement entre la surface du ballon et l'air réagit à la direction de la rotation du ballon. Lorsque le ballon a un effet de topspin, la vitesse de l'air au sommet du ballon devient inférieure à la vitesse de l'air à la partie inférieure du ballon - la vitesse tangentielle de la partie supérieure du ballon fonctionne dans la direction opposée au flux d'air. À l'inverse, la vitesse tangentielle de la partie inférieure du ballon fonctionne dans la direction exacte du flux d'air. Comme la vitesse de l'air au niveau de la partie supérieure de la balle est bien inférieure à la vitesse au niveau de la partie inférieure de la balle, la partie supérieure de la balle subit une plus grande pression par rapport à la partie inférieure de la balle en rotation. Cela provoque une force vers le bas appelée l'effet Magnus.

Cet effet de balle tournante est toujours présent lorsqu'un joueur frappe le ballon à droite ou à gauche de son centre; le ballon tourne alors dans le sens inverse des aiguilles d'une montre ou dans le sens des aiguilles d'une montre. Selon la direction de la rotation, la force Magnus agit vers la gauche ou vers la droite, forçant le ballon à s'incurver vers la gauche ou vers la droite.



*L'incroyable coup franc de Roberto Carlos contre la France, Juin 1997*

Sur un terrain de foot, cet effet est légèrement visible, si vous voulez bien l'observer toutefois, la chaîne YouTube Veritasium a réalisé l'expérience en lançant un ballon de basketball du haut d'un barrage, le résultat vaut clairement le détour (cherchez "backspin basketball flies off dam" sur YouTube).



# **Mathématiciens d'hier et d'aujourd'hui**

*À la Poursuite de la vérité dans la  
beauté*

## Harald Bohr

Ayoub Miguil

Si vous êtes passionnés de sciences fondamentales ou de sciences physiques plus particulièrement, le nom de Bohr vous est sans doute familier. C'est bien Niels Bohr auquel vous pensez, lauréat du prix Nobel en 1922 pour ses travaux sur la physique des atomes, contemporain d'Einstein, de Planck, de Schrödinger et de Heisenberg, cette brochette phénoménale de physiciens qui ont révolutionné la science et dont les travaux ne cessent de fasciner jusqu'à l'heure actuelle. Toutefois, notre mathématicien du jour n'est pas Niels, mais son frère cadet Harald, vif mathématicien danois du début du XXe siècle.

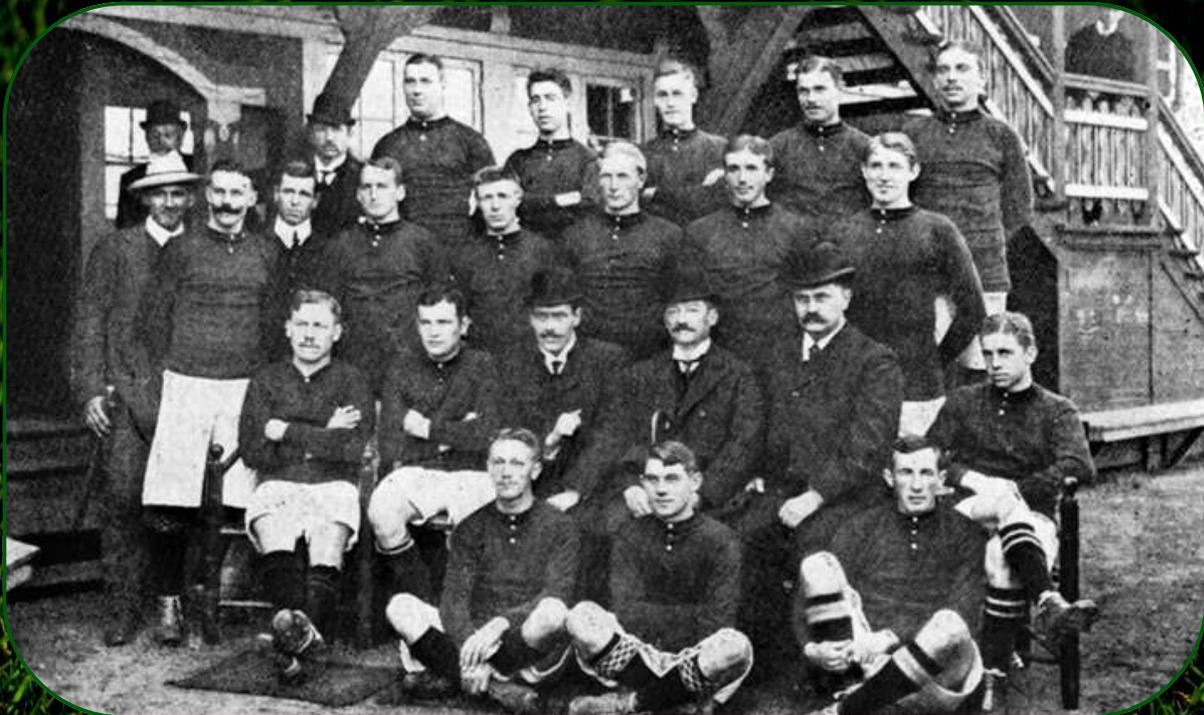
C'est en 1887 que naquit Harald, d'Ellen et Christian Bohr. Ce dernier est un scientifique reconnu dans le domaine de la médecine et de la physiologie. Après une enfance sans histoire, Harald s'inscrit à l'université de Copenhague en 1904 pour y étudier les mathématiques. Il en sort avec un diplôme de maîtrise dans ladite science en 1909, pour soutenir sa thèse de doctorat un an et demi plus tard dans la même université. Pour les plus curieux d'entre vous, sa thèse de doctorat a porté sur les séries de Dirichlet, un cas particulier des séries numériques dans le corps des nombres complexes. Harald s'est intéressé de près à ce genre de séries en particulier pour essayer - avec toute l'ambition et la naïveté d'un jeune mathématicien du début du 20e siècle - de résoudre le problème de la très célèbre conjecture de Riemann. Pour rappel, ce problème fait partie d'une courte liste de 7 problèmes, dits problèmes du millénaire, dont la résolution rapportera non seulement une gloire éternelle au courageux cerveau qui osera y arriver à bout, mais aussi (et surtout) la coquette somme d'un million de dollars.



Si ce problème est toujours irrésolu, c'est que notre cher Harald n'y est malheureusement pas arrivé à bout. Toutefois, il passera une bonne partie de sa carrière à étudier la répartition des nombres premiers, problème ouvert de la théorie des nombres qui est intimement rattaché à la fonction Zeta de Riemann (sur laquelle porte sa conjecture). Il travaillera toute sa carrière dans le domaine de l'analyse mathématique, et fondera même une notion de fonction "presque périodiques". Ses travaux ont contribué à enrichir et développer davantage le domaine très prolifique de l'analyse, et ses recherches ont inspiré des générations de mathématiciens.

À ce stade de la lecture, vous devez sans doute vous poser des questions quant au choix de ce mathématicien en particulier pour cette section. Pourquoi Harald Bohr et non pas un nom plus influent ou plus populaire auprès des passionnés de mathématiques ? Pourquoi pas Lagrange, Sophie Germain, Evariste Galois, Laplace, Hilbert, Weierstrass ou même Euclide ? Ces questions sont parfaitement légitimes, si nous vous parlons aujourd'hui de Harald Bohr, c'est exclusivement parce que ce journal est placé sous le thème du football. Cette réponse ne vous satisfait sans doute pas, permettez-moi de vous éclairer là-dessus en vous évoquant la seconde vie de Harald Bohr, le footballeur international.

En effet, en parallèle de sa vie de mathématicien de renommée internationale, Harald était un excellent milieu de terrain, qui a eu une longue et fructueuse carrière au sein de son club, l'Akamedisk Boldklub de Gladsaxe, club toujours en activité d'ailleurs. En raison de ses excellentes qualités, il a réussi même l'exploit de la sélection en équipe nationale danoise et dispute les Jeux Olympiques d'été de Londres en 1908. Lors de cette édition, le Danemark ira jusqu'en finale mais se contentera d'une médaille d'argent, en réussissant l'exploit d'infliger à l'équipe nationale française la plus lourde défaite de son histoire (une victoire 17-1 pour les coéquipiers de Bohr).



L'équipe du Danemark de football aux Jeux olympiques de 1908.  
Harald Bohr est dans la rangée du haut, 4e depuis la droite.

Lors de sa carrière de footballeur, il aura rarement la chance d'apparaître sous le maillot danois, non pas à cause de son niveau, mais en raison de la rareté des rencontres et des tournois internationaux, contrairement à aujourd'hui. D'ailleurs, le match d'ouverture du tournoi olympique de 1908 sera le premier match officiel de l'équipe nationale danoise, Harald était de la partie, rajoutant ainsi une dimension légendaire à sa double casquette - déjà bien impressionnante - de mathématicien et sportif de haut niveau. Bohr était très populaire auprès des supporters de foot dans sa ville et son pays en général, à tel point que lors de sa soutenance de doctorat en 1910, il y avait plus de fans de football que de mathématiciens, une situation sans doute inédite pour un scientifique d'un tel calibre.

C'est en janvier 1951, quelques mois après avoir décoré le mathématicien Laurent Schwartz de la très mythique médaille Fields, que Harald Bohr s'éteint à Gentofte, au Danemark, âgé de 63 ans, laissant derrière lui un riche héritage scientifique et sportif. Après lui, nombreux seront les jeunes analystes qui se confronteront à la conjecture de Riemann, nombreux seront les vaillants cerveaux qui contribueront au patrimoine mathématique, nombreux seront les ambitieux scientifiques qui dédieront leurs vies aux sciences. Après lui, nombreux seront les athlètes danois qui s'illustreront dans disciplines athlétiques et olympiques, nombreux seront les footballeurs qui mouilleront le maillot danois, à l'image d'Eriksen qui a failli y laisser sa vie il y a un peu plus d'un an. Mais au final, il n'y en a eu qu'un seul qui a brillé et continuera de briller de mille feux dans l'histoire de deux disciplines, Harald Bohr, petit frère de Niels Bohr et fils de Christian Bohr.

Si vous comptez regarder une des rencontres du Danemark à cette coupe du monde (au moins le match contre la France quand même), ayez une pensée pour cet homme qui, il y a un peu plus d'un siècle, comptait parmi ses milieux de terrain.

Ziad Oumzil

IMO 2016

**E**n été 2019, alors que j'avais que 17 ans, je pense qu'à ce moment-là, j'ai réalisé le plus important aboutissement de ma vie. Laissez-moi vous raconter mon histoire avec les mathématiques et avec les olympiades.

### Mes débuts avec les olympiades :

C'était au collège, lorsque j'ai eu le premier coup de foudre avec les maths. Découvrir des notions telles que la géométrie et les nombres négatifs et rationnels m'ont ouvert l'appétit. À ce jeune âge, je commençais à m'intéresser à cet aspect mathématique du monde, j'étais toujours impressionné par les idées créatives transmises par des générations depuis Thalès, Pythagore...

Je prenais plaisir à assister et à participer aux cours de mathématiques, j'ai été aussi chanceux d'avoir eu un professeur extraordinaire depuis la première année de collège, l'année dans laquelle j'ai entendu parler pour la première fois des olympiades régionales de mathématiques cependant ils étaient réservés que pour les élèves en troisième année collège (ce qui n'est plus le cas aujourd'hui), donc j'ai dû attendre deux ans pour pouvoir participer au niveau régional une expérience très enrichissante et j'ai fini par être classé 3ème au niveau de la région de Kénitra. Je me rappelle toujours de l'ovation qui m'était faite dans mon collège suite à mon résultat, ce qui m'a encouragé à m'investir davantage.

Le passage du collège au lycée était très marquant dans ma vie, sachant que je suis passé à un très grand établissement public Abdelmalek Essaadi dont le niveau des élèves était moyen.

Le tronc commun était une année dans laquelle je me suis trop relâché, vu que je n'avais aucune autre ambition, à ce rythme-là, je n'aurai jamais espéré réaliser quoi que ce soit d'exceptionnel dans ma vie. Heureusement, pendant l'été suivant le tronc commun, je suis tombé par hasard sur une vidéo de Math&Maroc, il s'agissait de leur première apparition sur les médias spécifiquement sur Medi1tv, l'émission « génération news » qui accueillait Amine Bennouna, le fondateur de l'association et Anzali Ahmed, un participant aux IMO 2017, ce qui m'a permis de découvrir pour la première fois les IMO. Ce simple passage sur Medi1tv m'a motivé. Être choisi à l'échelle nationale parmi les 6 personnes qui vont représenter le Maroc aux IMO est devenu mon nouvel objectif.

La sélection à mon époque commence par le passage de 6 tests au niveau national pendant la 1ère année de Baccalauréat, après on choisit 40 personnes dans tout le pays pour assister à un stage de formation à Rabat. Ce moment était très stressant, je ne m'attendais pas à être pris parmi les 40 mais je suis resté accroché à mon rêve. Mon père de bon foi voulant me rassurer me dit sur un air sérieux: "tu seras peut-être pris parmi les 40, mais tu ne réussiras pas à être choisi pour les IMOs", la première partie de cette phrase ne pose aucun problème et heureusement c'est ce qui est arrivé, cependant la deuxième partie m'a rendu triste mais elle m'a motivé, je voulais montrer que mon père se trompe. D'un côté je comprends parfaitement mon père, car l'idée qui régnait, c'est que pour être Top 6 au Maroc, tu dois être un génie, quelqu'un qui comprend tous sans faire d'efforts, c'est d'ailleurs ce que mon professeur de première avait clairement dit devant toute la classe.

## Les stages de formation et participations aux Olympiades Africaines

Mon premier stage de formation à Rabat m'a rassuré, rencontrer les 39 qualifiés m'a prouvé qu'on est tous pareils et qu'il n'y a pas de tels génies, j'ai même réussi à avoir un très bon classement dans ce premier stage. Je n'ai malheureusement pas pu participer aux olympiades arabes en Novembre 2018 dans lequel notre équipe a décroché la 1ère place, ce qui m'a poussé à travailler davantage. J'ai ensuite réussi à être sélectionné pour les olympiades panafricaines de mathématiques PAMO 2019 avec une très belle équipe à CapeTown en Afrique de Sud. L'expérience était magnifique, c'était d'ailleurs mon premier voyage en avion, un voyage de 20h ! Bien que l'Afrique de Sud avait une très forte équipe, nous avons pu décrocher la première place, et une médaille d'argent au niveau personnelle, je n'étais pas satisfait.

Au retour du Maroc, nos familles nous attendaient à l'aéroport avec des bouquets de fleurs ainsi que beaucoup de médias (Medi1tv, Hespresse...) ensuite, on a été accueilli par le ministre de l'éducation, c'était à ce moment que je me suis rendu compte de l'importance de ce qu'on a pu réaliser.



Photo d'un stage de formation

Directement, on a enchaîné sur le TST (Team Selection Test), le stage final dans lequel l'équipe qui va aller aux IMO est choisie. Les tests étaient tellement durs, à tel point que faire un seul exercice te permet de faire un très grand pas vers la qualification. Dieu merci, j'ai réussi. Après une formation à distance, guidée par le Dr. Omar El Housni. On a commencé notre aventure aux olympiades internationales de mathématiques (IMO) 2019 en Angleterre au campus de l'université de Bath.

## Participation aux Olympiades Internationales de Mathématiques IMO 2019

En participant à cette compétition, j'ai déjà réalisé mon rêve le plus cher, mais j'avais toujours un grand appétit. En arrivant au campus, j'ai été choqué par la diversité des nationalités et des langues, je n'ai jamais rencontré autant de nationalités dans un aussi petit laps de temps. Mais au début, tout le monde me paraissait stressé et réservé.

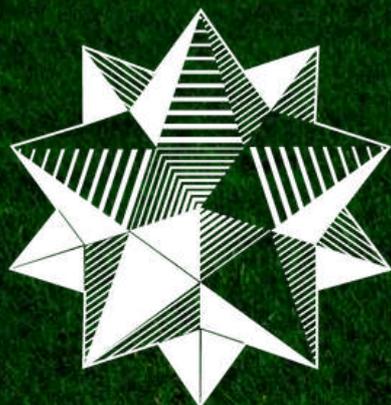
L'événement débute par une cérémonie d'ouverture dans laquelle notre équipe a décidé de porter des vêtements marocains, ce geste a été apprécié, et tout le monde nous regardait avec intérêt, d'ailleurs notre passage a été suivi par une pluie d'applaudissements, ce fut un moment fierté pour nous, les sourires dans la photo le prouvent.



Les représentants du Maroc aux OIM 2019

Le lendemain, on enchaîne sur le test numéro appelé DAY 1. Notre coach Omar El Housni a pris le soin de nous réveiller très tôt le matin, pour nous permettre d'être prêt mentalement pour le Day 1. Le test se déroulait dans un très grand gymnase et le test durait 4h30. Il se composait de trois problèmes très durs (P1,P2,P3), mais relativement, le premier problème P1 est plus facile que le deuxième (P2) et ainsi de suite. Le P3 est tellement difficile qu'il n'est parfois résolu que par 5-6 participants sur 600. Les problèmes sont choisis dans les domaines suivants : géométrie, Arithmétique, Combinatoire, Algèbre. Les marocains font en moyenne moins d'un problème par test, donc généralement notre but, c'est de faire le P1. Pour ma part, j'ai très bien réussi mon Day 1 en faisant les deux premiers problèmes.

Le deuxième test (Day 2) a exactement le même format que le Day 1, dans lequel j'ai réussi le premier problème du Day 2 et j'ai pu gratter un point dans le second problème. Chaque problème est noté sur 7 points, avec un total de 6 problèmes, j'ai obtenu une note de 22/42. Cette année, pour obtenir une médaille de bronze, il fallait avoir un total supérieur à 17 points, et au moins un total de 24 points pour la médaille d'argent. Finalement, j'ai obtenu une médaille de bronze. Seulement deux points me manquaient pour obtenir la médaille d'argent. Pire, mon camarade Chafi Marouane a raté la médaille de bronze par un point.



# IMO 2019

60<sup>TH</sup> INTERNATIONAL  
MATHEMATICAL OLYMPIAD

Après la fin des tests, tous les participants se sont relâchés. Les organisateurs nous ont programmé plusieurs activités. Des sorties culturelles, des activités sportives ... On a pu visiter la fameuse université d'Oxford et particulièrement son département de mathématiques dans lequel j'ai eu la chance à assister à une conférence du fameux mathématicien Andrew Wills qui a réussi en 1994 à établir la démonstration du Grand Théorème de Fermat postulé par le grand mathématicien français Pierre de Fermat au 17<sup>ème</sup> siècle. Ce qui m'a marqué pendant la compétition, c'est surtout la diversité. Rencontrer toutes ces personnes qui partagent avec moi le même amour des mathématiques, et discuter avec eux, connaître leurs cultures. Je ne me suis jamais senti autant épanoui dans ma vie, je suis fier d'avoir pu monter sur le podium avec le drapeau de mon cher pays. C'est pourquoi, je considère que cette expérience est la meilleure et le restera toujours. Enfin, je vous invite à regarder la vidéo de notre participation aux IMO 2019 disponible sur la chaîne Youtube de Math&Maroc.



## Le retour au Maroc

Comme à chaque retour de compétition, une foule nous attendait à la sortie de l'aéroport. Ma famille entière s'est déplacée, j'en suis très reconnaissant, c'est grâce à eux que j'ai pu réaliser mon rêve. À la fin, je tiens à remercier mon prof Omar El Housni, qui s'est consacré pendant 2 années à nous former bien qu'il faisait à cette époque des études de doctorat à l'université de Columbia à New York, et grâce à lui notre équipe a eu les meilleurs scores pour une équipe marocaine depuis 2004. Je remercie tous les professeurs du ministère qui eux-aussi veillent à notre formation avec le soutien de l'association Math&Maroc.



## Pourquoi les olympiades?

C'est vrai que les olympiades sont des activités extra-scolaires, et généralement les familles marocaines et nos établissements scolaires ont tendance à négliger ce genre d'activité en croyant qu'ils ne servent à rien et qu'ils ne font que perdre le temps à l'élève, à l'opposé, ils surévaluent les performances aux examens régionaux et à l'examen national, alors que ces types d'examens sont très critiquables et ne testent que la capacité des personnes à apprendre par cœur. Grâce aux olympiades, j'ai développé un niveau très élevé en mathématiques comparé à mes camarades de classe, le programme scolaire en mathématiques est devenu très facile à traiter, les olympiades m'ont permis aussi de gagner le prix du concours général en mathématiques qui est octroyé à seulement 4 personnes dans tout le pays, ils m'ont aussi aidé à accéder à la meilleure CPGE de France à savoir Louis-le-Grand, et ensuite d'intégrer l'École polytechnique.

Les activités extra-scolaires tels que les olympiades en mathématiques, en physiques ou informatiques ou bien les activités sportives sont primordiales et indispensables, il faut juste regarder la situation dans les pays développés comme les états unis dans lesquels toutes les universités et les lycées investissent massivement sur ses activités extras scolaires comme les sports, au point que les performances des universités lors des compétitions sportives influent sur leurs classements, ainsi ils créent leurs champions sportifs, les meilleurs chercheurs du monde, et ils maintiennent toujours les premiers positions aux IMO. Au Maroc, malheureusement, il y a un manque grave de tels instituts, de tels investissements et de telles mentalités. Malgré tout ça, on arrive de temps en temps à découvrir des talents, des champions qui honorent notre pays, comme le scientifique Rachid Yazami, ou des champions olympiques Hicham el Guerrouj, Nawal El Moutawakel..

## Le football, la passion de tous les Marocains

Dans le même contexte, parlons de football. L'amour des Marocains envers ce sport n'a pas d'égale, il suffit juste de jeter un coup d'oeil par la fenêtre, tu remarqueras sûrement les jeunes du quartier entraînés à frapper un ballon au milieu de la route (telle était mon enfance) ou bien, il suffit de voir à quel point les cafés sont pleins à craquer par des hommes, et même des femmes surtout quand l'équipe nationale joue.

La coupe du monde Qatar 2022, C'est un événement très attendu par tous les Marocains. Tout le monde attend avec impatience la liste des joueurs sélectionnés pour le mondial. Le sujet du joueur marocain du Botola alimente encore une fois les débats, notre équipe nationale sera encore constituée majoritairement par des marocains nés et formés en Europe pour la raison qu'ils sont meilleurs, et c'est la vérité. Ces pays européens ont réussi grâce à leurs politiques d'investissement dans les infrastructures sportives et des clubs de formations à faire surgir des talents de football; et maintenant ils récoltent les fruits de leurs politiques réussies comme la France qui a gagné la coupe du monde 2019 avec une équipe constituée majoritairement de joueurs français d'origine africaine.

Il faut juste croire en notre continent et dans nos capacités, et dresser des politiques tournées vers l'avenir que ce soit dans le football ou bien dans d'autres domaines tels que les olympiades, et un jour, nous serons aussi en capacité de gagner une coupe du monde ou bien d'avoir des médailles d'or aux IMO. Actuellement, nous sommes fiers de l'exploit de l'équipe nationale au Qatar, nous sommes tous derrière vous : **“vive le Maroc, vive le continent africain”**.





# **Autour des Mathématiques**

*À la Poursuite de la vérité  
dans la beauté*

# Beauté des mathématiques

## Les mathématiques du corps humain

Mouad Moutaoukil

Comme nous le répétons souvent, les maths sont présentes partout autour de nous et même en nous. Étant une production de notre cerveau, c'est sur les manifestations des maths à l'intérieur de l'humain que nous nous concentrerons dans ce numéro. Le corps humain est un joyau de la nature et de la science, la médecine contemporaine par exemple foisonne d'applications de mathématiques. C'est également grâce aux maths que notre connaissance du corps humain, des différentes pathologies et thérapeutiques s'élargit continuellement.

### Corps et maths

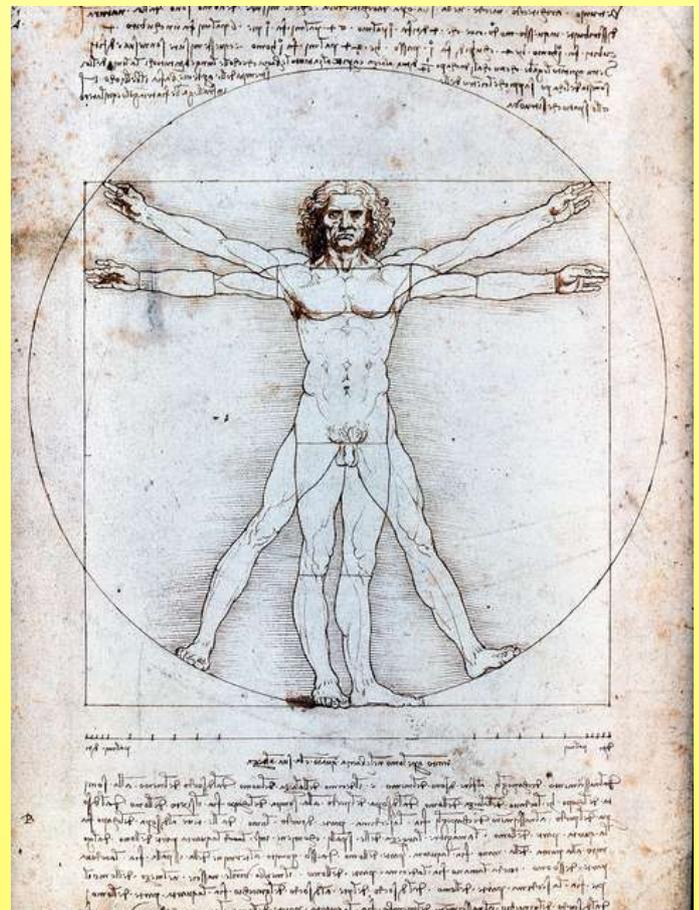
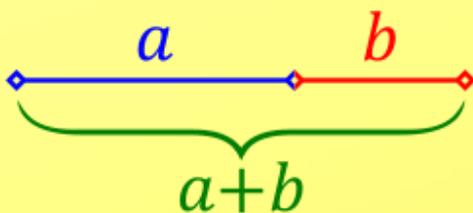
Le corps humain a un axe longitudinal de symétrie. De plus, il contient plusieurs formes géométriques : carré, cercle, triangle, losange, etc.

L'un des secrets géométriques du corps découvert au premier siècle avant J.C. par Marcus Vitruvius Pollio, un architecte romain connu sous le nom de Vitruve :

Si on tend les bras et en serrant les jambes, le corps de l'humain adulte est contenu dans un carré qui touche l'extrémité des mains, des pieds et de la tête, et qui a pour le centre le pubis. Si on écarte les bras et les jambes, le corps s'inscrit dans un cercle qui a pour centre le nombril et qui touche les pieds et les mains. Léonard de Vinci en a fait un dessin célèbre en 1492.

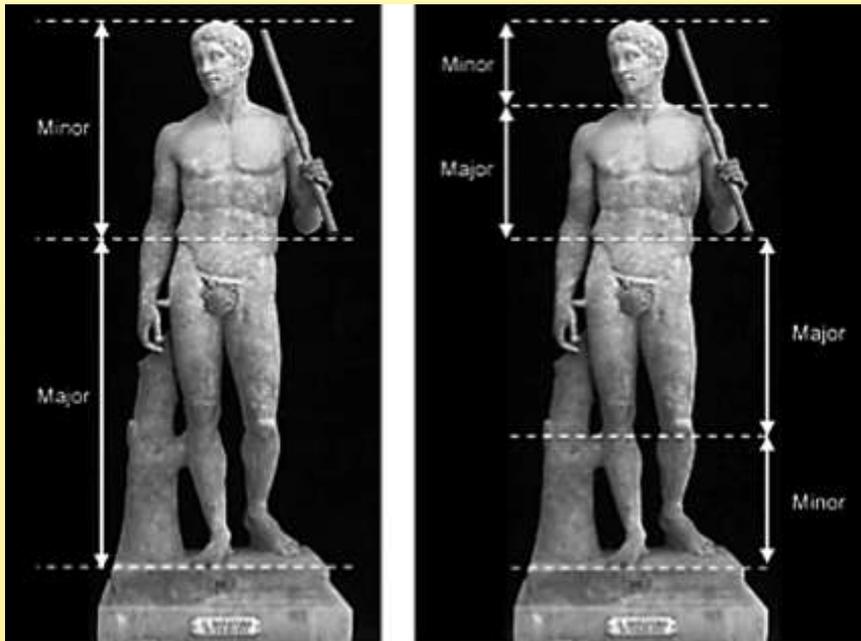
À l'instar de tous les objets et organismes, le corps humain est soumis à des lois mathématiques ; on retrouve notamment quelques proportions fixes quelle que soit la taille de l'individu : la hauteur de la tête correspond à un huitième de la hauteur totale du corps, la distance de la base du cou à la racine des cheveux correspond à un sixième de la hauteur totale, et la distance du milieu de la poitrine au sommet du crâne correspond à un quart de la hauteur totale.

Dans cette même approche analytique, le nombre d'or est présent un peu partout. On rappelle que ce nombre est défini par le rapport  $a/b$  tel que  $(a + b)/a = a/b$ ,  $a$  et  $b$  sont deux parties inégales d'un segment quelconque.



« L'Homme de Vitruve » de Léonard De Vinci 1492

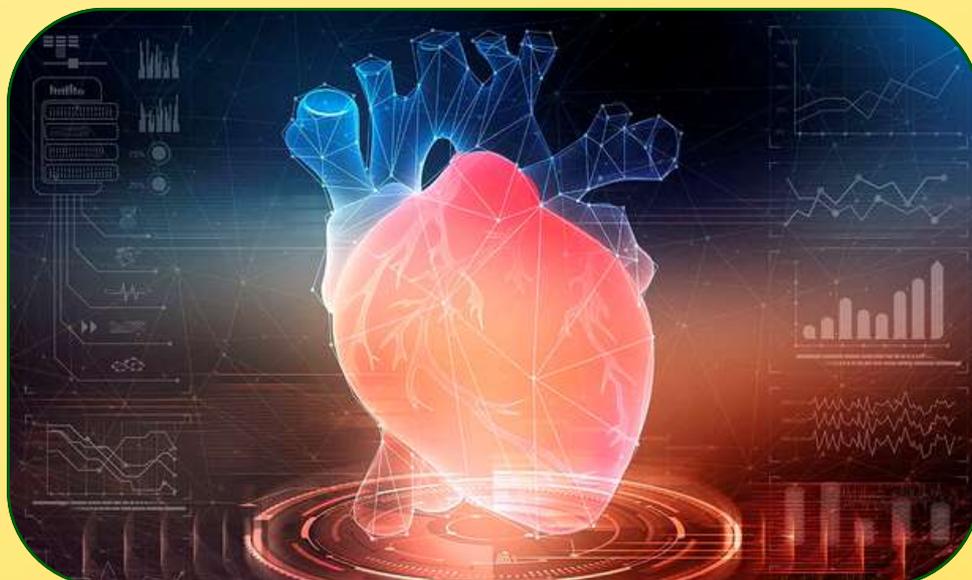
Le nombre d'or est égal à  $(1+\sqrt{5})/2$ , soit environ 1,618033 98875... le record de calcul actuel, détenu par le mathématicien canadien Simon Plouffe, est de dix millions de décimales. Le nombre d'or est désigné par la lettre grecque  $\phi$ , en hommage au sculpteur grec Phidias, qui l'aurait utilisé pour concevoir la statue de la déesse Athéna au Parthénon, sur l'Acropole d'Athènes, au Ve siècle avant notre ère.



Le rapport de la hauteur totale du corps humain à la distance sol-nombril est égal au nombre d'or, de même que le rapport des distances sol-nombril et sommet du crâne-nombril. Le rapport de la distance cou-nombril à la hauteur de la tête est égal au nombre d'or de même que le rapport des distances sommet du crâne-nombril et cou-nombril. Il en est de même pour les rapports des distances sol-nombril et genou-nombril ou encore les distances nombril-genou et genou-sol. De plus, le rapport des distances de la 1ère phalange sur la 2ème, de la 2ème phalange sur la 3ème, de la distance des doigts au coude sur la distance du poignet au coude correspondent également au nombre d'or.

### **Cœur et maths**

En 1899, Otto Frank a traduit en modèle mathématique le modèle analogique artériel décrit par William Harvey au 17ème siècle et par Stephen Hales au 18ème siècle. Ces deux derniers chercheurs avaient comparé le cœur et la circulation sanguine aux pompes utilisées par les pompiers de l'époque, ces modèles se nomment Windkessel (chambre à air en allemand).



Le cœur fonctionne comme une pompe qui, grâce à des contractions périodiques et des vaisseaux flexibles, propulse le sang dans tout l'organisme et assure ainsi l'alimentation en oxygène du corps entier. Chaque jour, le cœur pompe environ 8000 litres de sang. Le débit cardiaque dépend entre autres de la fréquence cardiaque, de la compliance et de la résistance. La compliance signifie l'extensibilité du muscle cardiaque. La résistance est la résistance des vaisseaux à l'écoulement du sang.

La résistance et la compliance sont des idéalizations de la dynamique de l'écoulement du sang et des vaisseaux. Nous les supposons constantes pour représenter un certain état du système cardiovasculaire, sachant que ces paramètres changent dans le temps en réponse à notre environnement.

La variation de pression dans le tronc artériel peut être modélisée par une seule équation différentielle :

$$dP(t)/dt + P(t)/RC = Q(t)/C$$

dans laquelle le cœur est une source de débit variable  $Q(t)$  et la pression  $P(t)$  est celle mesurée à la sortie du ventricule gauche.  $R$  et  $C$  sont la résistance et la compliance. La solution  $P(t)$  de cette équation différentielle linéaire, qu'on peut résoudre par intégration explicite ou numérique, est une fonction ondulatoire. Ce sont les valeurs extrêmes de cette onde de pression que mesure, lors d'un examen de routine, le médecin à l'aide de son stéthoscope et de son sphygmomanomètre.

Parmi les applications de ce modèle, on peut modéliser la pression ou tension artérielle, ou encore calculer la fonction pression moyenne, qui correspond à la pression artérielle moyenne (PAM), par intégration.

### **Cerveau et maths**

Le cerveau est l'organe le plus complexe du corps humain, il est capable d'intégrer les informations, de contrôler la motricité et d'assurer les fonctions cognitives. Le cerveau humain est composé de 100 milliards de cellules nerveuses, ce sont les neurones, qui constituent un réseau interconnecté et très précis. De point de vue scientifique, cet organe constitue un enjeu majeur car il renferme plein de mystères tant dans son développement, dans son fonctionnement normal et pathologique que dans ses facultés d'adaptation.



Le cerveau abonde d'exemples d'applications de mathématiques, les connexions neuronales sont après tout des messages électrochimiques entraînant des effets spécifiques : excitation ou inhibition.

La vision est le procédé par lequel le cerveau traite les images, à travers les yeux et le nerf optique. La zone du cerveau qui reçoit les signaux visuels est le cortex visuel V1, situé dans le lobe occipital, à l'arrière de l'encéphale.

Les expériences montrent que l'on observe un pic de fréquence gamma, supérieure à 30 hertz, lorsqu'on stimule le cortex visuel V1 grâce à des signaux visuels spécifiques, par exemple des images avec des lignes noires et blanches se déplaçant dans une direction donnée. Des modèles mathématiques constitués de réseaux d'équations différentielles ordinaires sont utilisés pour modéliser l'activité de V1.

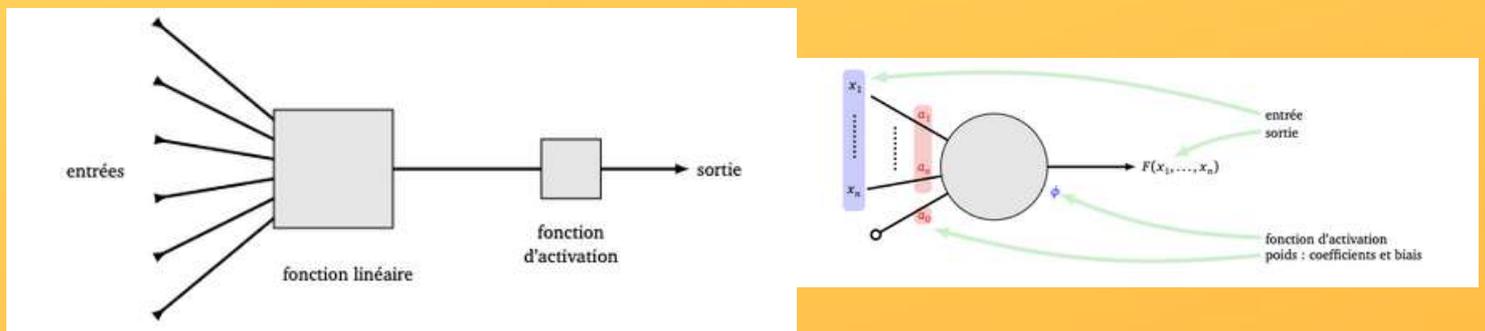
Ce type de modèle mathématique constitué d'un réseau d'entités individuelles fait partie de la catégorie des systèmes complexes. Lorsqu'on étudie les systèmes complexes, on cherche typiquement à comprendre comment, pour une certaine structure de réseau, des entités individuelles et un niveau de stimulation donnés, la variation d'un paramètre va permettre l'émergence de synchronisations et de rythmes.

On peut également mettre cette communication neuronale en équation avec la géométrie riemannienne, ces mathématiques qui ont conduit au succès de la théorie d'Einstein. En effet, la diffusion de l'information neuronale ressemble beaucoup à une diffusion de chaleur, mais dans un espace courbe.

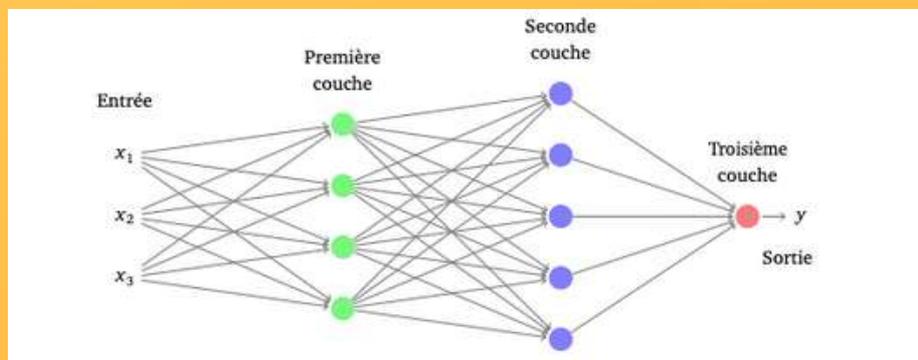
Une des applications très concrètes de ces modèles est de calibrer la valeur des paramètres pour permettre une implémentation optimale de solutions thérapeutiques. Par exemple, les techniques de stimulation électrique ou électromagnétique sont très étudiées dans des contextes tels que la thérapeutique des aphasies ou de la maladie de Parkinson.

Un autre volet des mathématiques en lien étroit avec le cerveau est les réseaux de neurones. Il s'agit d'un système inspiré du fonctionnement des neurones biologiques qui trouve actuellement son application dans l'intelligence artificielle, les statistiques et la neurophysiologie entre autres.

Le principe du perceptron linéaire est de prendre des valeurs en entrées, de faire un calcul simple et de renvoyer une valeur en sortie, le neurone artificiel est représenté par un perceptron affine auquel on ajoute une nouvelle arête pondéré par un nombre réel qui correspond au biais :



Le réseau de neurones est donc obtenu en juxtaposant plusieurs neurones :



Un réseau de neurones bien construit peut approcher n'importe quelle fonction mathématique, il s'agit du théorème d'approximation universelle.

Pour conclure, il est indéniable que les mathématiques offrent des possibilités immenses de compréhension du corps humain, et également d'émergence de nouvelles thérapeutiques qui ne cessent de faire évoluer la médecine et d'améliorer la santé et la qualité de vie de tout un chacun.

## شذرات من تطور الرياضيات الكلاسيكية إلى غاية القرن 16

عبدالقادر بنعيسات

### الرياضيات عند المصريين والبابليين

الرياضيات شأنها شأن باقي العلوم و المعارف، فهي نتيجة لتراكمات عبر الزمن، حيث أسهمت في تطورها ووصولها للشكل الحالي مجموعة من الباحثين عبر التاريخ من كل الحضارات وكمختلف بقاع العالم. ولعل الحضارتين البابلية و المصرية من الحضارات الأولى التي ظهر عندها بعض الاهتمام بالفكر الرياضي، حيث بدأ علم الحساب والهندسة في مصر الفرعونية نتيجة للحاجيات الاقتصادية والاجتماعية، كما أن المصريين كان بإمكانهم استخراج مساحات بعض الأشكال الهندسية، ويذكر أيضا أنهم يستعملون الكسور خاصة التي بسطها العدد واحد، واستخدموا العمليات الحسابية الأربع وغيرها من المظاهر التي تدل على ابتكارهم لمجموعة من الموضوعات الرياضية والاستدلالات الهندسية.

لقد اقتصرت المعرفة الرياضية في الحضارتين البابلية والمصرية على الجانب التطبيقي العملي كاستخدام الحساب والهندسة في دراسة حركة الكواكب والنجوم من أجل تنظيم شؤون الملاحة ومن أجل قياس الزمن وغيرها من الاستعمالات. كانت هذه الإرهاصات من الحضارتين البابلية و المصرية رغم ارتباطها بالجانب العملي البحث أساسا اثبتت عليه الرياضيات النظرية عند اليونان خاصة بعد القرن السادس قبل الميلاد مع المدرسة الفيثاغورية.



لوحة ملونة للأميرة نفرتيات وأمامها أعداد لمختلف القرابين

## الرياضيات عند اليونان

بدأت الرياضيات عند اليونان تنحو منحى مغايرا، فإذا كان المصريون و البابليون قد ركزوا على الجانب التطبيقي من الرياضيات فاليونان كانوا من السابقين لاتخاذ الرياضيات كعلم نظري بحت. بلا شك فقد تأثر اليونان بالمعارف التي وصل إليها شعوب الشرق، خاصة وأن أعلام الفكر الفلسفي و الرياضي اليونان قد زاروا بلاد الشرق و تعلموا فيها كفيثاغورس و أفلاطون وديمقريطس وغيرهم، لكن رغم ذلك نجد فرقا كبيرا بين التراث الرياضي الشرقي الذي يكتسي طابعا عمليا و اليوناني الذي يعد علما نظريا صرفا.

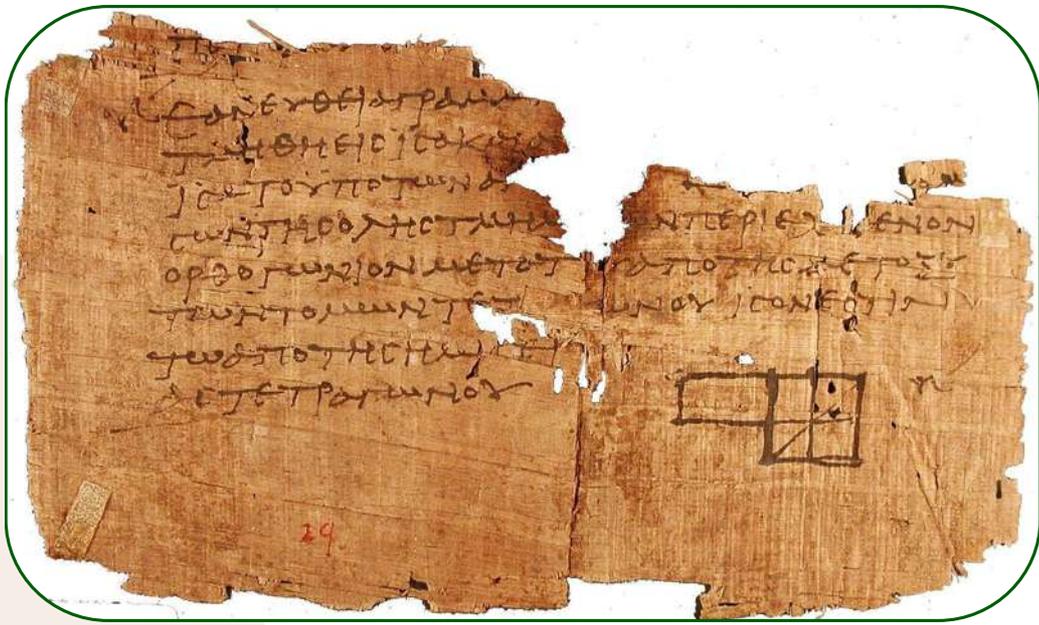
لقد نقل اليونان المواضيع الرياضية لمستوى ميتافيزيقي عقلي مترفع عن عالم الحس، فعوض أن تتناول الرياضيات مواضيع متعلقة بحاجات اجتماعية متغيرة و مؤقتة صارت تتعلق بما هو ثابت و أبدي، وذلك باضفاء صبغة فلسفية عليها جعلتها علما مجردا ومستقلا عن العالم الحسي.

لقد تمسك اليونان باضفاء صفة الكمال على الكائنات الرياضية، فموضوع الرياضيات عندهم عبارة عن ماهيات ذهنية خالصة و مجردة لها وجودها الموضوعي و الكامل المستقل عن المحسوسات، فاعتبروا الكائنات الرياضية ماهيات عقلية، سواء الأعداد الصحيحة أو الأشكال الهندسية، أما الأشكال الحسية التي يمكن معاينتها بالحواس فليست سوى محاكات ناقصة للماهيات العقلية الكاملة.

الاقتصار على صفة الكمال في الكائنات الرياضية جعل اليونان يبعدون عن اهتمامهم كل ما لا يمكن أن يتصوره كاملا، مما جعلهم يهتمون بشكل خاص بالهندسة الإقليدية المستوية و يبتعدون عن باقي أنواع الهندسة الفراغية، كما أنهم اهتموا بالموضوعات الرياضية التي تتسم بصفات الجمال و البساطة و التناسق، فالجمال يوجد في الأشكال المنتظمة باعتبارها فكرة مجردة و ليس فيما يضيفه عليها المشتغل بها، و على نفس المنوال فقد صرفوا بحثهم في مجال الأعداد بكيفية خاصة تراعي الكمال و التناسق و الجمال، فصبوا كل تركيزهم على الأعداد ذات الصفات (الجميلة) كالأعداد الكاملة (هي الأعداد التي تساوي مجموع قواسمها) و الأعداد المتحابة و الأعداد الأولية وغيرها. فكان التفوق اليوناني على نموذج الرياضيات البسيط و المتناسق و الجميل و الابتعاد عن ربط الرياضيات بالواقع و مشاكله المعقدة، سببا في عدم تطورها بشكل كبير وبقائها على تلك الحال مدة طويلة.

كما أنه قد شاب هذا التناسق و الجمال الذي وجده اليونان في الموضوعات الرياضية بعض الانزعاج، خاصة بعد اكتشافهم لنوع جديد من الأعداد الذي لا يقبل القياس، و هي الأعداد التي تعرف حاليا بالأعداد الجذرية، تم اكتشاف هذه الأعداد حينما كان يطبق فيثاغورس نظريته على مختلف المثلثات القائمة الزاوية، فإذا اعتبرنا مثلثا قائم الزاوية طول ضلعيه المجاورين للزاوية القائمة 1 فإن طول وتره يساوي جذر 2 و هو عدد لا يمكن تصوره ذهنيا، فاعتبر ذلك الفيثاغوريون فضيحة يجب اخفاؤها، ولعل ذلك كان من أسباب تركيز اليونان على الهندسة أكثر من اشتغالهم بالأعداد و الحساب.

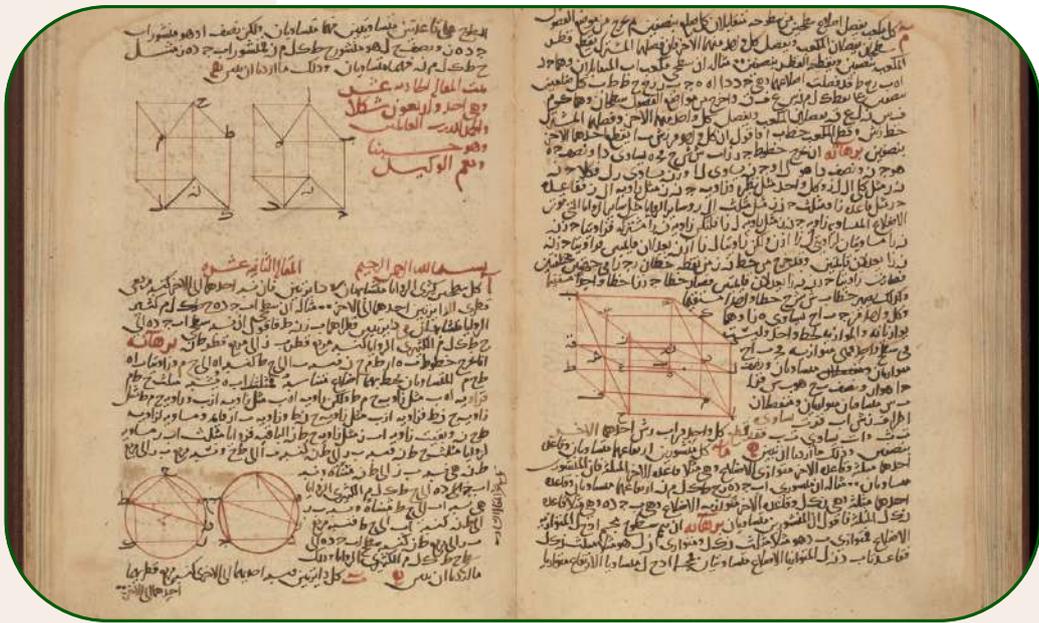
كما تقدمت الرياضيات خطوة أخرى في التجريد مع أورغانون أرسطو وبلغت قمته مع كتاب (الأصول) لأقليدس حيث بدأت تكتسي طابعا منطقيًا، فصرنا نبرهن على القضايا الرياضية منطقيا بمختلف أنواع البرهان وفق قواعد منطقية صارمة، هذه الطريقة البرهانية التي طورها أرسطو و أفليدس وجعلوا منها غاية في حد ذاتها، هي نفسها كانت في رياضيات أفلاطون و من قبله لكن بحدة أقل و باعتبارها وسيلة لبلوغ المعرفة الرياضية الكاملة.



لوحة ملونة للأميرة نفرتيات وأمامها أعداد لمختلف القرابين

## الرياضيات عند العرب

تأثر العرب كغيرهم بمعرفة من سبقوهم، فقد عرف العرب أقليدس و كتابه "الأصول"، و عرفوا فيثاغورس و مدرسته، لكنهم لم ينظروا للموضوعات الرياضية نفس النظرة، فإذا كان اليونان قد اعتبروا الكائنات الرياضية ماهيات مستقلة ذات وجود موضوعي، فالباحثون العرب -أو جملهم- اعتبروها مجرد موضوعات ذهنية مجردة، مما جعلهم يصفون اهتماما أكثر على الجانب المنطقي البرهاني الذي تمتاز به الرياضيات وأهملوا الجانب الميتافيزيقي لها.



مقتطف من ترجمة كتاب "الأصول"، لإسحاق بن حنين.

هذا وقد أسهم العلماء العرب بشكل كبير في تطوير البحث الرياضي، خاصة مع الخواريزمي، و ابن الهيثم و ابن البنا و عمر الخيام و غيرهم الكثير، ومن العرب انتقل الجبر إلى أوروبا خلال القرن الثالث عشر ليصير علما كاملا في القرن السادس عشر على يد كل من فييت و ديكارت، فبين المرحلتين اليونانية و الديكارتية كانت مرحلة انتقالية طبعها العرب بكثير من الاكتشافات الرياضية على رأسها الجبر الذي لا يزال يحمل الاسم العربي لحد الآن دلالة على موطن نشأته.



# **Applications des Mathématiques**

*À la Poursuite de l'utilité des  
mathématiques*

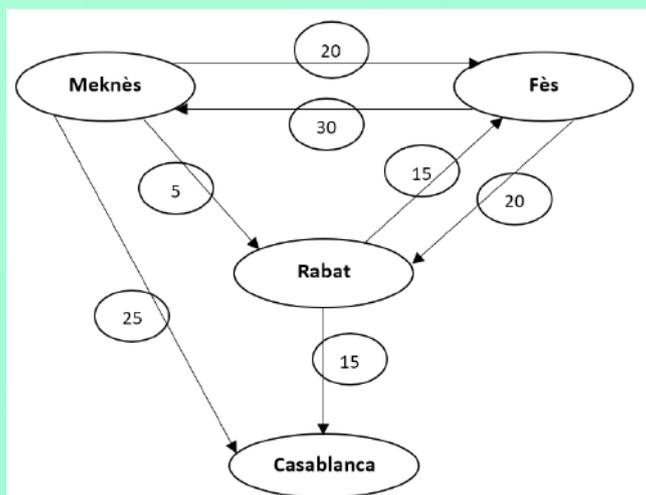
## Graphes, Flots et football ...

Marouane Ibn Brahim

### Qu'est-ce qu'un graphe orienté ?

Imaginons que vous vouliez modéliser le réseau de autoroutes entre quatre villes par exemple. Comment vous y prendriez-vous ? Une des manières les plus utilisées pour ce genre de modélisations est celle du graphe, en particulier du graphe orienté. Dans ce cadre, chaque ville est représentée par un nœud, et chaque route (orientée) entre deux villes est appelée arc. De plus chaque arc peut se voir affecter une capacité, qui peut par exemple représenter le nombre maximal de voitures empruntant la route.

Considérons l'exemple fictif suivante :



Dans cet exemple la route de Meknès vers Fès à une capacité d'au plus 20 voitures. **Et les flots ?**

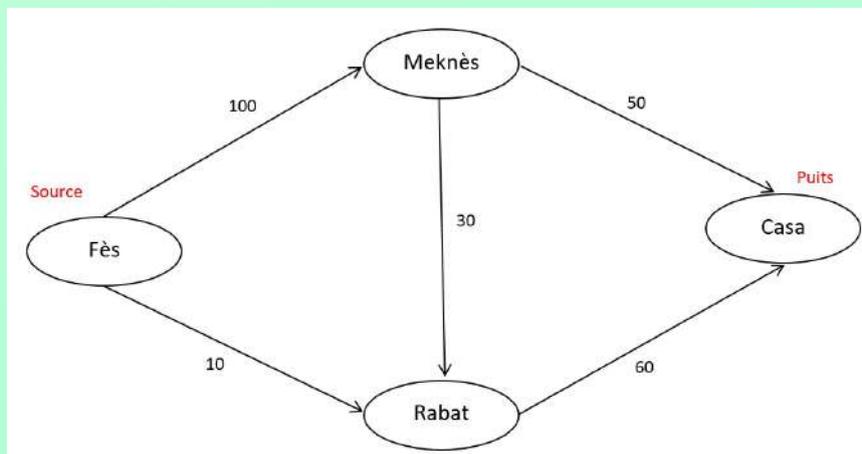
### Qu'est-ce qu'un flot ?

Un flot est une manière de décrire l'état du réseau. En particulier, un flot décrit l'utilisation de chaque arc, ce qui dans notre exemple, peut représenter le nombre de voitures empruntant le réseau. On dit qu'un flot est admissible si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- Le flot traversant chaque arc est inférieur à la capacité de l'arc (il n'y a pas plus de voitures que la capacité de la route).
- Pour chaque nœud, le flot entrant est égal au flot sortant, c'est-à-dire que pour chaque nœud, la somme des flots traversant les arcs entrants est égale à la somme des flots des arcs sortants. (Aussi appelé "conservation du flot" ou "loi de Kirchhoff").

### Un cas particulier le s - t flot

Un cas particulier de graphes de flots peut contenir deux nœuds spéciaux « s » et « t » qu'on appelle source et puits. Ces nœuds ne respectent pas la loi de Kirchhoff comme elle a été énoncée précédemment. Pour le nœud source, cette loi se transforme en : le flot sortant est supérieur au flot entrant. Pour le puits, elle se traduit par le flot entrant est supérieur au flot sortant. Un cas particulier de nœud source est un nœud avec uniquement des arcs sortants et un cas particulier de nœud puits est un nœud avec uniquement des arcs entrants. Précisons que tous les autres nœuds doivent respecter la loi de Kirchhoff.



## Exercice

Pour cet exemple, montrer que pour tout flot admissible, le flot sortant de la source est égal au flot entrant à la destination. Essayer ensuite de généraliser ce résultats à tous les graphes de flots.

## Problème de flot maximal

Le problème du flot maximal consiste à trouver le flot admissible de valeur maximale, c'est-à-dire tel que la somme des flots sortants de la source (ou entrant au puits) est maximale.

### Exemple :

Peut-on trouver la valeur de flot maximal dans la figure précédente? (Indice montrer que la valeur =  $27 + 18 + 35$ )

## Problème de championnat (difficile)

Considérons le problème d'un championnat de football. Par simplicité nous faisons les hypothèses suivantes :

- 4 équipes : Maroc, Canada, Croatie et Belgique.
- Les équipes gagnent 1 point par match gagné.
- Il n'y a pas de possibilité de match nul (temps additionnel et penaltys par exemple)

À un moment donné du champion du championnat, on dit qu'une équipe est mathématiquement éliminée si quel que soit l'issue des matchs restants, l'équipe ne gagne pas le championnat.

### Exemple 1 :

Classement	Equipes	Nbr de victoires	Matchs restants à jouer			
			Maroc	Canada	Croatie	Belgique
1	Maroc	9	X	1	6	0
2	Canada	6	1	X	0	2
3	Croatie	4	6	0	X	1
4	Belgique	3	0	2	1	X

Trouver les équipes mathématiquement éliminées. (Il y a  $14 - 8 + 17 - 21$  équipes à trouver) .

## Considérons désormais le cas général

Classement	Equipes	Nbr de victoires	Matches restants à jouer			
			Maroc	Canada	Croatie	Belgique
1	Maroc	$v_1$	X	$r_{12}$	$r_{13}$	$r_{14}$
2	Canada	$v_2$	$r_{12}$	X	$r_{23}$	$r_{24}$
3	Croatie	$v_3$	$r_{13}$	$r_{23}$	X	$r_{34}$
4	Belgique	$v_4$	$r_{14}$	$r_{24}$	$r_{34}$	X

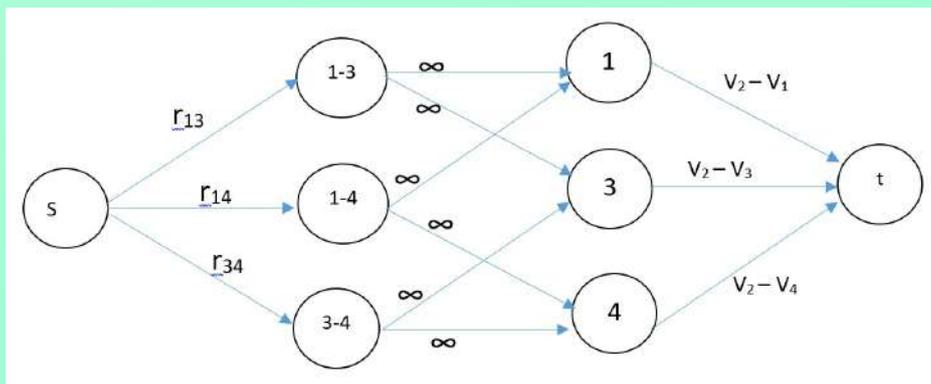
Pour  $j > i$ , on pose  $r_{ij} = r_{ji}$ .

On définit également  $r_i = \sum_{k \neq i} r_{ik}$  pour  $i = 1, 2, 3, 4$

1. Justifier que s'il existe deux équipes  $i$  et  $j$  avec  $v_i + r_i \leq v_j$ , alors  $i$  est mathématiquement éliminée.
2. Justifier que pour savoir si une équipe  $i$  est éliminée, il suffit de considérer le cas où ladite équipe gagne tous ses matchs restants.

Ainsi, en modifiant le tournoi de sorte à ce que l'équipe 2 ait gagné tous ses matchs restants, on peut supposer que  $r_2 = 0$  en remplaçant  $v_2$  et  $r_2$  respectivement par  $v_2 + r_2$  et 0. (comment cela affecte-t-il  $r_1, r_3$  et  $r_4$ ?)

3. Intéressant nous a l'équipe 2 (le Canada dans notre exemple) pour savoir s'il est mathématiquement éliminée, nous considérons le graphe de flots suivant :



Notons que dans cet exemple, nous considérons qu'il n'existe pas d'équipe  $i$  telle que  $v_2 + r_2 < v_i$ , sinon le problème est trivial grâce au résultat de la question 1. Nous utilisons également la question 2 pour modifier le championnat de sorte à ce que l'équipe 2 gagne tous ses matchs restants. Ces deux hypothèses justifient que toutes les capacités sont positives.

4. Montrer que l'équipe 2 n'est pas mathématiquement éliminée si seulement si la valeur du flot maximal est égale à  $r_{13} + r_{14} + r_{34}$ .
  - Indice 1 : commencer par montrer que si le flot maximale est égale à  $r_{13} + r_{14} + r_{34}$  alors 2 n'est pas mathématiquement éliminée.
  - Indice 2 : si un flot de valeur  $k$  est réalisable, interprétez ce flot comme le résultat de  $k$  rencontres restantes entre les équipes 1 - 3 - 4.
5. Utiliser la question 4 pour montrer que le Canada est mathématiquement éliminé dans l'exemple 1.

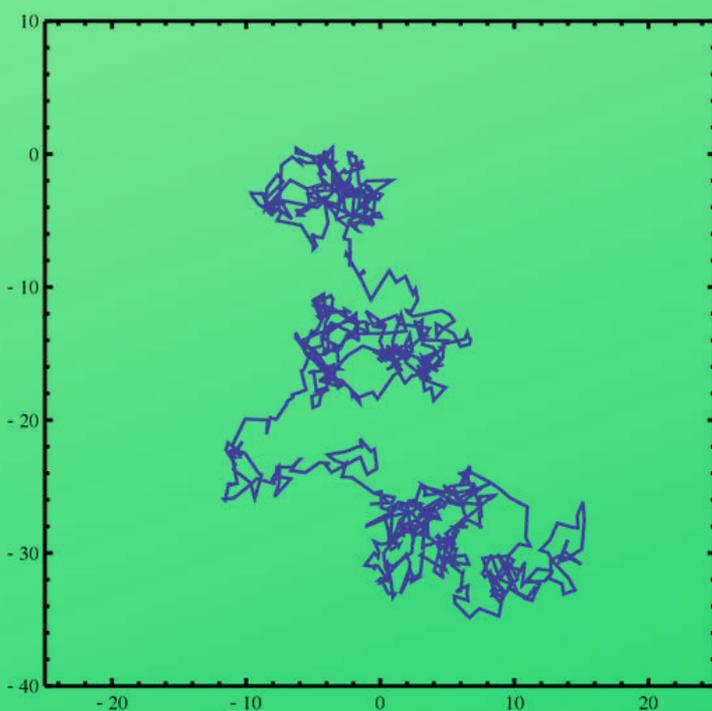
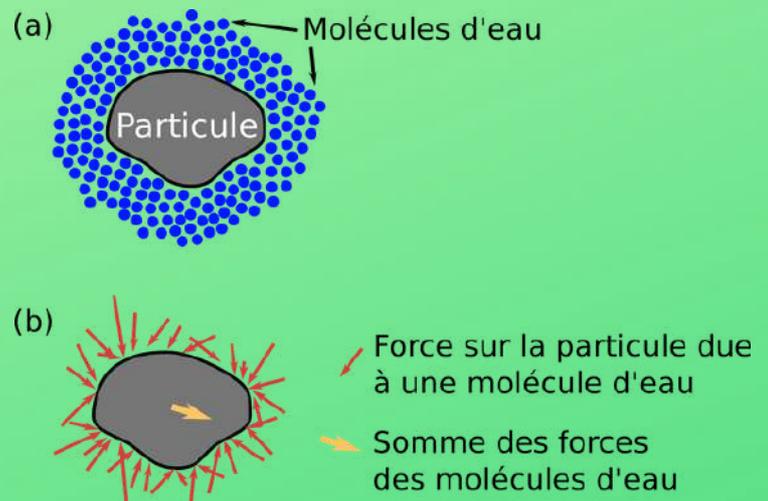
**Approfondissement :** comment se généralise le graphe de flots si nous avons plus que 4 équipes ?

Nous attendons vos questions et vos tentatives en commentaire sur notre page Facebook.

## Le mouvement brownien, Vol. 1

Si vous avez lu l'article du volume précédent sur les fractales, vous avez sans doute rencontré à un moment ce fameux mouvement brownien. Pour ce premier article de la série sur les mathématiques financières, série qui nous mènera vers des équations et modèles mathématiques sophistiqués utilisés en finance de marchés, nous discuterons donc sans surprise du mouvement brownien. Cet objet mathématique, assez mystérieux et très fascinant, est utilisé dans bien des domaines et permet de refléter le caractère aléatoire de certains systèmes physiques qui nous entourent, avec bien entendu des applications vastes en finance.

C'est durant le 18ème siècle qu'un savant anglais, l'abbé John Turberville Needham, fervent biologiste, observe des particules se déplacer dans des solutions contenant des graines de pollen. L'abbé, fort de son bagage spirituel, attribua ce mouvement à une force vitale. Un peu moins d'un siècle plus tard, en 1827, le naturaliste écossais Robert Brown observa le même phénomène et le documenta minutieusement, c'est donc son nom que portera ce mouvement chaotique de particules. Le mouvement des particules observé par les microscopes de l'abbé Turberville et de Brown sont dûs à l'interaction entre un nombre très (très) grand de particules, chacune se déplaçant aléatoirement dans l'espace en question. Voici comment on peut grossièrement résumer cela (figure à droite) :



Si l'on considère que les particules se déplacent sur un plan, et si l'on se concentre uniquement sur une seule particule, on peut modéliser son mouvement (par un mouvement brownien, mais on y vient) et l'observer, cela ressemblera un peu à la figure à gauche.

Ensuite, il faudra attendre le début du 20ème siècle et les travaux d'Albert Einstein pour quantifier le mouvement brownien dans le domaine de la physique de particule. Ses travaux permettront à Jean Perrin de calculer le nombre d'Avogadro (une des constantes remarquables et fondamentales en physique) en 1909 et de remporter le prix Nobel en 1926. C'est enfin Louis Bachelier qui, en 1900, introduira un premier modèle du mouvement brownien et l'appliquera à la finance, dans une thèse remarquable intitulée "Théorie de la Spéculation".

## Processus stochastique

Soit  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  un espace de probabilité et  $I = R^+$  (ou  $[0, T]$ , avec  $T > 0$ ). On appelle processus stochastique à valeurs dans  $R^n$  toute famille  $X = (X_t)_{t \in I}$  de vecteurs aléatoires définis sur  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  à valeurs dans  $(R^n, \mathcal{B}(R^n))$ . En particulier, pour  $n = 1$ , c'est tout simplement une famille de variables aléatoires à valeurs dans  $R, \mathcal{B}(R)$ .

Ceci est la définition mathématique d'un processus stochastique (ou processus aléatoire). Un processus stochastique n'est donc qu'un processus qui dépend du temps, mais qui varie de manière aléatoire.

## Trajectoire d'un processus

À  $\omega \in \Omega$  fixé, on appelle la trajectoire d'un processus l'application

$$t \mapsto X_t(\omega)$$

Si cette application est continue pour tout  $\omega$  dans  $\Omega$ , on dit que le processus est à trajectoires continues.

Un cas particulier, très intéressant et très important des processus stochastiques est celui des processus gaussiens.

## Vecteur gaussien

Un vecteur aléatoire à valeurs dans  $R^n$  est dit gaussien si et seulement si toute combinaison linéaire de ses composantes est une variable gaussienne (i.e. suit une loi normale).

Par exemple, le vecteur  $X = (X_1, \dots, X_n)$  est gaussien si et seulement si pour tout vecteur de réels  $A = (a_1, \dots, a_n)$ , la variable aléatoire

$$Y = X.A^T = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_nX_n$$

suit une loi normale.

## Processus gaussien

Un processus stochastique sur  $I$  est dit gaussien si et seulement si pour tout  $n \in N^*$ , et tous  $t_1 < t_2 < \dots < t_n \in I$ , le vecteur  $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$  est gaussien.

Maintenant que nous avons introduit les notions essentielles, nous pouvons enfin donner une définition mathématique du mouvement brownien (en dimension 1).

## Mouvement Brownien Standard

On appelle Mouvement Brownien Standard tout processus stochastique  $W = (W_t)_{t \in I}$  tel que :

- $W_0 = 0$  presque sûrement ;
- accroissements stationnaires gaussiens :  $\forall 0 \leq s < t \in I$ , la variable aléatoire  $W_t - W_s$  suit une loi normale centrée et de variance  $t - s$ , notée  $\mathcal{N}(0, t - s)$ . En particulier,  $W_t - W_0 = W_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ .
- accroissements indépendants :  $\forall n \geq 1$  et  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n \in I$ , les variables aléatoires  $(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$  sont indépendantes, pour tout  $i \in \{0, \dots, n - 1\}$ .

Remarquons que le mouvement brownien est noté ci-avant W pour Wiener, un mathématicien américain qui est à l'issue de plusieurs résultats sur le calcul stochastique, il est souvent noté aussi B comme Brown (naturellement).

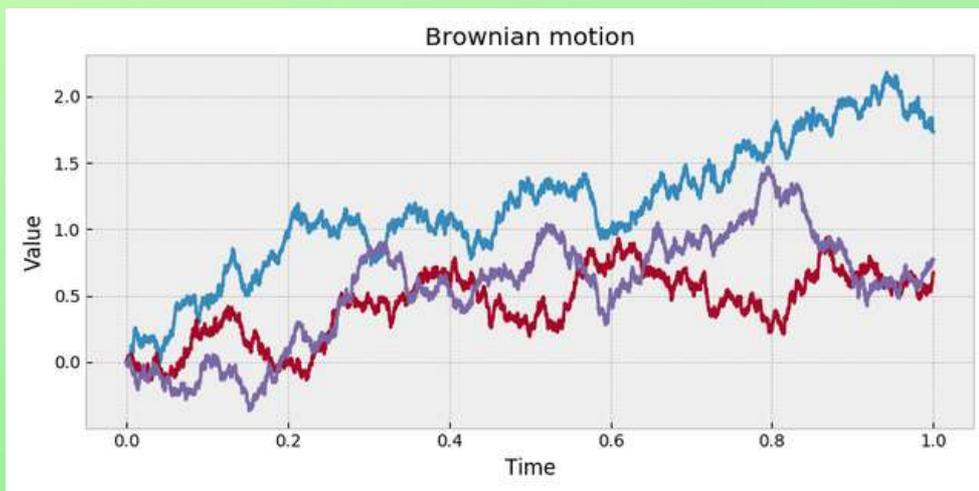
Voici enfin un résultat intéressant qui permet de caractériser le mouvement brownien :

## Caractérisation du Mouvement Brownien

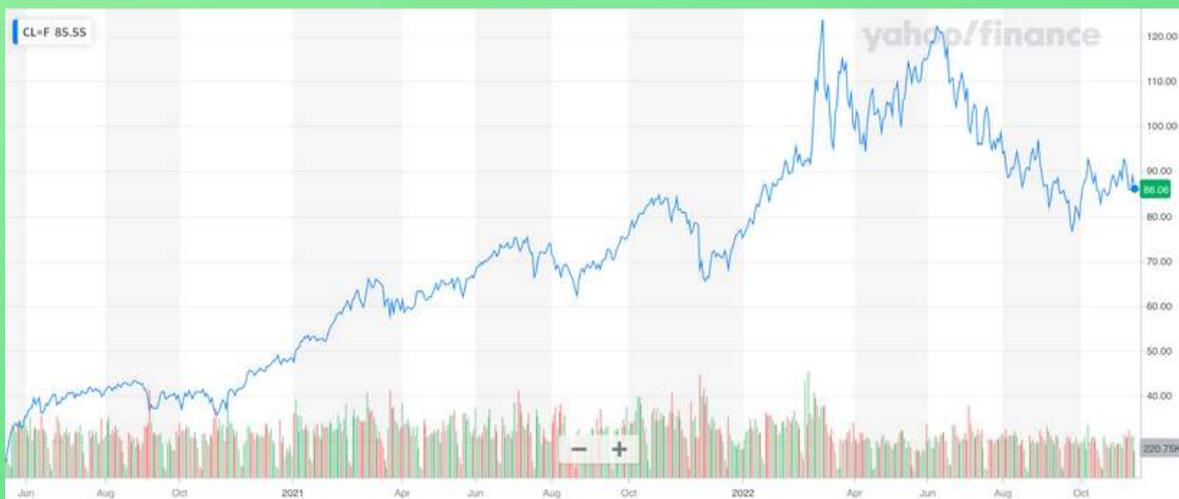
Soit  $W$  un processus stochastique. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $W$  est un mouvement brownien standard
- $W$  est un processus gaussien, centré, à trajectoires continues et de fonction de covariance  $Cov(W_t, W_s) = \min(t, s)$ .

Nous nous contenterons de ces définitions et de cette caractérisation pour ce numéro. Pour faire le lien de manière assez grossière avec le domaine de la finance de marchés, il suffit d'observer des simulations de mouvements browniens :



Observons à présent la fluctuation du prix du pétrole (données issues de la plateforme yahoo!finance) :



Il est possible d'observer que les fluctuations du marché sont (tout naturellement) aléatoires, personne n'est capable de prédire le prix du pétrole d'ici une semaine ou même deux jours. Toutefois, connaître le comportement du marché est capital en finance, plusieurs modèles sont utilisés pour prédire l'évolution du marché, malgré la composante aléatoire, c'est là qu'intervient le mouvement brownien ! Rendez-vous dans les prochains numéros pour découvrir comment ce processus stochastique, conjugué à la théorie fascinante du calcul stochastique, permet de donner une quantification de la dynamique des prix et des différents actifs dans le marché.



# To promote mathematics in Morocco

MATH&MAROC is a Moroccan association working for a better preparation of young Moroccans to the International Mathematics Olympiads.

## Nos partenaires principaux



RESTEZ CONNECTÉS AVEC  
MATH&MAROC

