Vol. 1, No. 1, 2017, pp. 1–7

Math & Maroc est une revue mathématique publiée par l'association Math & Maroc dix fois par an. Elle propose des cours et des problèmes à résoudre de niveau secondaire.

Nous vous invitons à nous envoyer tous vos commentaires, remarques et suggestions en nous contactant à l'adresse redac.mathetmaroc@gmail.com.
Nous sommes aussi intéressés par de nouveaux problèmes. Tout problème proposé devrait s'accompagner d'une solution, ou au moins d'assez d'informations pour indiquer qu'une solution est possible. Veuillez inclure toute référence ou réflexion qui pourrait aider les rédacteurs et rédactrices. Nous vous invitons particulièrement à envoyer des problèmes originaux. Toutefois, tout problème intéressant quoique non original est bienvenu pour autant qu'il ne soit pas trop connu et qu'il soit accompagné des références nécessaires. Dans ce cas-là, il faut obtenir la permission de l'auteur avant de publier le problème.
Le journal est aussi ouvert à de nouveaux articles ou de nouveaux cours. Les articles devraient être soigneusement rédigés et raisonnablement courts. Ils devraient être d'un niveau accessible à des élèves de collège ou de lycée.
N'hésitez pas à nous contacter pour toute information complémentaire.

Sommaire

Éditorial *Par Assil Fadle*

C'est avec un immense plaisir que j'inaugure le premier numéro du journal Math&Maroc. Cette nouvelle publication partage son nom avec la non moins récente association dont l'objectif est de promouvoir l'activité mathématique au Maroc, notamment via la préparation aux Olympiades Internationales de Mathématiques. Le journal s'inscrit dans la lignée de ce projet en proposant à la fois du contenu relatif aux Olympiades et des articles d'ordre plus général. En effet, chaque membre de l'équipe de rédaction a eu à coeur de partager sa passion pour cette science que forment les mathématiques - la mathématique, diraient les bourbakistes - dont la rigueur n'égale que la beauté. C'est ainsi que vous trouverez pêle-mêle dans ce numéro des cours d'inégalités et d'arithmétique, une présentation des nombres de partitions destinée à en révéler l'esthétique, une biographie du plus célèbre des mathématiciens et le récit de la participation aux Olympiades d'un ancien membre de l'équipe marocaine ; sans compter la série d'exercices de niveau variable dont nous attendons vos solutions ! Au nom de la rédaction, je vous souhaite finalement autant de bonheur à découvrir les pages de ce recueil mathématique que nous en avons eu à le composer.

Portrait d'un mathématicien : Carl Friedrich Gauss

Carl Friedrich Gauss (1777-1855) est l'un des plus extraordinaires mathématiciens de tous les temps. Ce génie a permis des avancées majeures dans énormément de domaines des mathématiques et d'autres sciences (physique, astronomie…), au point qu'on l'a surnommé « le prince des mathématiques ». En voici une présentation.

Gauss par Gottlieb Biermann

Sa vie

Gauss est né à Brunswick le 30 avril 1777 dans un milieu défavorisé. Sa mère ne se rappelait pas de sa date de naissance ; elle savait seulement qu'il était né huit jours avant l'Ascension, un mercredi. Ces informations ont suffi à Gauss pour retrouver sa date de naissance ! Une légende attribue au mathématicien une autre prouesse, celle d'avoir découvert à l'âge de huit ans comment calculer très rapidement $1+2+\ldots+100$. Que cette légende soit vraie ou pas, le jeune Gauss avait clairement fait preuve d'aptitudes spéciales en mathématiques : le duc de Brunswick les a remarquées et a permis à Gauss d'aller au Collegium Carolinum puis à l'université de Göttingen.

Les études du jeune mathématicien sont brillantes. Gauss écrit ses *Disquisitiones Arithmeticae*, œuvre majeure d'arithmétique où il introduit notamment les congruences ; il mène aussi une thèse où il démontre le théorème fondamental de l'algèbre. Par ailleurs, Gauss effectue dès l'âge de 19 ans une importante découverte sur le problème de la constructibilité des polygones, un problème sur lequel les mathématiciens s'acharnaient depuis l'Antiquité : quels sont les polygones réguliers qu'on peut tracer avec seulement une règle non graduée et un compas ? La découverte de Gauss aboutira au théorème de Gauss-Wantzel qui résout complètement le problème : ce sont exactement les polygones à n côtés où n est le produit d'une puissance de 2 et de nombres premiers de Fermat distincts. Une anecdote raconte que Gauss était si impressionné par son propre résultat qu'il a demandé à inscrire un heptadécagone régulier sur sa tombe (17 est bien un nombre premier de Fermat). Toujours dans cette période, Gauss conjecture à partir d'une simple liste des nombres premiers le fameux « théorème des nombres premiers », prédisant la répartition des nombres premiers parmi l'ensemble des entiers. Ce théorème sera prouvé près d'un siècle plus tard…

Gauss ne s'intéresse pas qu'aux mathématiques pures, au contraire. Une fois sorti de l'université, il parvient via une méthode originale de calcul à déterminer la position de Cérès, planète tout juste découverte. Ce résultat lui apporte la célébrité à travers toute l'Europe et lui permet d'accéder au poste de professeur d'astronomie et directeur de l'observatoire astronomique de Göttingen en 1807. Gauss se consacre alors à l'astronomie. Il publie en 1809 un traité majeur sur le mouvement des corps célestes autour du Soleil, où il introduit notamment la méthode des moindres carrés, encore utilisée de nos jours pour comparer des données expérimentales à un modèle mathématique. En 1818, il effectue aussi une étude géodésique du royaume de Hanovre. Il invente pour cela son propre instrument, l'héliotrope, et développe la géométrie différentielle et la topologie.

En 1831, Gauss collabore avec un physicien allemand, Wilhelm Weber. Cette collaboration donnera lieu à de nombreux résultats d'électromagnétisme et notamment la découverte des lois de Kirchhoff. Le nom de Gauss sera même repris comme unité de mesure du champ magnétique. Ces contributions à la physique ne sont pas les seules, puisque Gauss a publié en 1840 un traité d'optique qui a fait date.

Sa personnalité

Gauss était un perfectionniste. Loin de publier toutes ses découvertes, il en gardait beaucoup dans ses journaux personnels. En effet, il craignait des réactions hostiles à ses travaux précurseurs, comme ceux sur la géométrie euclidienne par exemple, redécouverts de manière indépendante des décennies plus tard. Le « prince des mathématiciens » était avant tout un esprit créatif et d'avant-garde. À ce sujet, le rapport de l'Institut de France sur les *Disquisitiones Arithmeticae* mentionne « un des traités les plus marquants d'analyse pure », dont « il est impossible [de] donner une idée, parce que tout y est nouveau, jusqu'au langage et à la notation. » La liste des découvertes de Gauss, savant touche-à-tout, est bien plus longue que ce qui est présenté ici. Les mathématiques modernes ont gardé son nom en géométrie (courbures de Gauss), en algèbre linéaire (pivot de Gauss), en analyse (gaussienne)... Mais l'amour premier de Gauss est l'arithmétique, science au cœur des *Disquisitiones Arithmeticae* et dont il dira que c'est « la reine des mathématiques ».

Préférant chercher que professer, Gauss n'aimait pas enseigner. Mais la liste de ses rares élèves comprend des mathématiciens d'envergure : Dedekind, Riemann... À la mort de Gauss en 1855, le prince des mathématiques est peut-être le mathématicien le plus renommé d'Europe, et ce depuis plusieurs décennies. Quand le génial Évariste Galois rédige son testament scientifique la veille de sa mort en 1832, il demande que celui-ci parvienne à Gauss afin qu'il en détermine l'importance. C'est dire l'éclat qu'avait le mathématicien de son vivant, et qu'il a encore de nos jours.

Le coin des anciens : Amine Bennouna

J'ai toujours été fasciné par les mathématiques ! Depuis que j'étais tout petit, je n'arrêtais pas de dire à mes professeurs et camarades que j'allais établir un grand théorème quand je serai plus grand. Bien que cela déclenchait de grands rires chez mes camarades, mon amour pour les mathématiques ne faisait que grandir et ma motivation redoublait. Mais je ne pouvais malheureusement pas, dans le cadre où j'étais, assouvir mon désir de découverte, à part les quelques fois ou mon père m'offrait quelques résultats mathématiques que je dégustais comme des petites sucreries.

Comment j'ai découvert les olympiades

En dernière année collège, notre professeur de mathématiques nous a parlé des olympiades : quelle révélation ! Je pouvais enfin goûter à des mathématiques avancées. J'ai passé les « sélections » de mon professeur, et j'ai pu donc vivre ces vendredis après-midi où j'allais dans un lycée passer les 3-4h du test olympique. Je ne préparais pas vraiment ces tests, d'une part parce qu'on nous prévenait la veille, et d'autre part parce que je ne savais pas trop quoi préparer. En tout cas, je me réjouissais toujours de pouvoir affronter ces défis mathématiques.

J'ai entendu parler pour la première fois des IMO en début de deuxième année du baccalauréat. On m'avait raconté que 3 personnes de ma ville avaient réussi à participer à une compétition internationale de mathématiques. En faisant quelques recherches sur internet, j'ai rapidement été fasciné par cette compétition. C'était la plus grande compétition de mathématiques pour des élèves suivant des études du secondaire, là où se regroupent chaque année les plus brillants jeunes mathématiciens de tous les pays du monde, et où les problèmes les plus durs sont exposés. C'est devenu un rêve, mon rêve. Il fallait que j'y participe. Mais cette fois, je ne pouvais pas passer les tests sans préparation, je devais m'entraîner. Je ne savais pas vraiment quoi travailler... J'ai fait quelques tours de blogs, de forums... Et je commençais à me rendre compte qu'il y avait plusieurs personnes qui s'intéressaient à la compétition, des personnes d'un bien meilleur niveau. Je n'étais plus enfermé dans ma petite bulle n'englobant que ma ville, mon lycée, j'ai découvert qu'il y avait plusieurs autres personnes toutes plus fortes les unes que les autres et que le défi ne s'arrêtait jamais. J'ai donc essayé de contacter un des participants de l'année dernière pour me diriger. Il a répondu à l'appel et m'a beaucoup aidé. J'ai grâce à lui découvert les cours d'Animath que j'ai étudiés. J'ai finalement réussi à passer le test et être sélectionné pour les stages. C'était une de mes plus grandes joies.

La route vers les IMO

Il y avait 3 stages à passer. Le premier était très particulier pour moi. On était entre 30 et 40 personnes. Je me rappelle de mes discussions avec les autres participants les premiers jours. Je me rendais compte qu'ils étaient beaucoup plus entraînés que moi. Je commençais à avoir peur de ne pas réussir, je me sentais tellement moins fort que les autres... J'ai quand même réussi ! Ce stage a été très important : j'ai appris que je devais me battre si je voulais y arriver, que ça ne serait pas facile, que j'avais du retard par rapport aux autres et qu'il fallait le combler et même aller beaucoup plus loin ! Je me suis donc battu. Les IMO sont devenus ma priorité. Je faisais le minimum possible pour garder un bon niveau pour le bac, et je passais tout le reste du temps à travailler pour les IMO.

Quand le deuxième stage est arrivé, j'étais plus prêt mais le niveau était bien plus élevé. Je commençais à connaître les inégalités, l'arithmétique, les équations fonctionnelles... Mais je n'avais, par contre, toujours pas travaillé la géométrie ni la combinatoire, ce qui était d'ailleurs une grande erreur. J'ai réussi à passer la sélection du deuxième stage de justesse. On n'était plus alors que 11 candidats restants, et ils étaient tous très forts. J'ai donc continué à travailler au maximum, à chercher plus de livres, passer plus de temps sur Art Of Problem Solving... Puis vint le troisième stage. Je me rappelle qu'avant les 2 tests, un des encadrants du stage nous avait montré quelques photos des IMO 2013, la promotion avant nous. Ça m'avait procuré une telle bouffée de motivation ! Ces tests étaient les plus durs pour moi. Je me sentais tellement proche des IMO ! Je ne voulais pas rater cette occasion. J'ai donné tout ce que j'avais pendant les tests. Je me suis battu jusqu'aux dernières minutes. J'ai réussi à faire 3 exercices sur 6. Je ne savais pas si j'allais être pris, il fallait attendre les résultats. Ah ce moment d'attente... On m'a finalement annoncé que j'étais parmi les 6 ! J'allais participer aux IMO en représentant le Maroc, mon rêve devenait enfin réalité !

Je garde de très bons souvenirs des stages : entre les batailles acharnées lors des tests, ces fameux moments d'attente avant les résultats, la joie des parents quand je leur annonçais les résultats, l'ambiance chaleureuse lors des dîners avec les autres candidats... C'était une excellente expérience !

Le dernier stage était en mai, et les IMO débutaient en juillet. Il ne me restait donc plus qu'un mois pour préparer la compétition. J'ai commencé entre autres à travailler sur la géométrie et la combinatoire. On me disait que c'était trop tard, mais je savais qu'il ne fallait surtout pas les rater s'ils tombaient au premier problème ou au quatrième problème. J'ai donc passé la majorité du temps à travailler dessus. Je n'avais pas trop eu le temps de lire des ouvrages, j'ai donc préféré travailler sur des exercices, notamment les BMO (Balkan Mathematical Olympiad) en suivant le conseil d'un ami.

Le rêve devient réalité

Le départ se rapprochait. On commençait à recevoir nos billets d'avion et nos dernières instructions. On s'est retrouvé à Rabat, au centre où on avait nos stages pour préparer le départ. Ils nous ont donné des petits livrets sur le Maroc, des drapeaux, et autres petits objets à échanger avec les autres participants. De mon côté, je n'ai, bien sûr, pas oublié de prendre ma djellaba et ma « Belgha » pour rajouter une petite touche marocaine à la cérémonie d'ouverture !

Notre année était particulière. En plus de la semaine classique des IMO, on avait une semaine de plus de formation pour les pays africains organisée par l'Afrique du Sud. On est donc arrivé une semaine plus tôt au Cap. Après un long vol de 20 heures (C'était mon tout premier vol !), on a atterri à l'aéroport de Cape Town où on a été accueilli par des organisateurs qui nous ont emmenés à notre lieu de résidence. La semaine de formation s'est très bien passée. On a eu l'occasion de rencontrer plusieurs équipes africaines et d'échanger un peu sur nos expériences respectives dans la préparation aux IMO.

En fin de semaine, on a été transféré à l'université de Cape Town. Dès notre arrivée, un guide, qui sera le nôtre pendant toute la semaine, nous a accueillis avec le drapeau marocain. La semaine des IMO allait commencer ! L'université de Cape Town était gigantesque. On s'amusait à se balader en regardant les laboratoires par-ci, les terrains par-là. On a profité du premier jour pour faire connaissance avec d'autres participants. Les IMO, ce sont plus de cent pays ! Le premier jour était particulièrement impressionnant. Autant de drapeaux, autant de cultures, autant de langues, autant de personnes, tous étant les meilleurs de leur pays en mathématiques. Ça ne me donnait que plus de motivation et plus d'envie d'élever notre drapeau le plus haut possible !

Le lendemain, c'était la cérémonie d'ouverture. Ah je n'oublierai jamais ce jour-là ! C'était une grande cérémonie commémorant plusieurs traditions des IMO, un peu comme aux jeux olympiques. Au tout début de la cérémonie, toutes les équipes montent sur l'estrade avec leur drapeau et sont présentées au public. Quelle fierté de pouvoir lever son drapeau devant tous les pays du monde, vêtu de sa djellaba ! C'était un moment inoubliable.

Les deux épreuves

Le jour suivant avait lieu le premier test. Grande journée. On a pris un peu de temps la veille avec l'équipe pour nous motiver. Je me suis levé très tôt pour me préparer et on s'est dirigé avec l'équipe vers le lieu d'examen. C'était un immense gymnase. C'est très impressionnant de voir autant de tables alignées dans une salle. On sentait la pression en rentrant dans le gymnase. Il y avait des drapeaux un peu partout. Les « deputy leaders » donnaient les dernières consignes à leurs équipes. Une fois que tout le monde était installé, un organisateur nous a rappelé les instructions au microphone, et enfin on entend « You can now turn your paper ».

L'épreuve avait commencé. J'ai d'abord lu les 3 problèmes. Le premier problème (ou P1 pour les initiés) était un problème de suites. Soulagement ! J'avais peur de tomber sur de la combinatoire ou de la géométrie, les deux étant très défavorables à notre équipe. Le P2 était un problème de combinatoire et le P3 un problème de géométrie. J'ai commencé à chercher le P1, je devais le résoudre pour pouvoir espérer une médaille. J'ai donc décidé de me donner à fond dessus. Il y avait une équivalence à établir. Au bout de 45 minutes de recherche, j'ai réussi à établir le premier sens. J'ai commencé à travailler sur le deuxième sens. J'ai trouvé une méthode très simple qui le résolvait en quelques minutes, et comme d'habitude il y a un sens facile dans une équivalence, j'étais confiant. J'étais en train de réussir le P1, c'était bien parti ! Après avoir rédigé le P1, il me restait 2h45. J'ai commencé à travailler sur le P2. De la combinatoire ! Je n'étais pas entraîné là-dessus. En dessinant rapidement le schéma du P3, je n'avais pas beaucoup d'idées, et connaissant la difficulté du P3, j'ai décidé de consacrer tout le reste du temps au P2. En travaillant sur les cas triviaux, j'ai conjecturé le résultat. J'ai donc essayé de le montrer pendant tout le reste du temps, sans grand succès. J'ai tout de même écrit quelques résultats que j'avais pu établir.

L'épreuve était finie. Le scénario parfait était de réussir le P1 et le P2, mais je me disais que j'aurais 7 points au premier et quelques points au deuxième. En faisant le P4 je garantirais la médaille de bronze. En sortant de l'épreuve et en discutant avec mes camarades, je me suis rendu compte que ma solution du P2 était fausse et que le sens retour du P1 n'était pas facile. Je m'étais trompé. C'était un coup très dur pour moi. Je n'aurais que la moitié des points au P1 et aucun point au P2. J'avais raté l'épreuve. Je n'aurai pas dû être trop rapide sur le sens facile et je n'aurai pas dû non plus m'obstiner à montrer la conjecture. La médaille de bronze s'éloignait. Il fallait maintenant que je fasse deux exercices au deuxième test. Je commençais à me dire que je n'avais plus aucune chance. Mais c'était mon unique participation aux IMO ! Il ne fallait pas que je baisse les bras...

Je me suis levé le lendemain, déterminé à réussir le deuxième test. Je suis arrivé tôt au gymnase, je me suis installé et j'étais prêt. « You can now turn your paper ». P4 géométrie, P5 et P6 combinatoire. Le défi ne pouvait pas être plus dur. J'ai décidé de me mettre à fond sur le P4 jusqu'à le résoudre. J'ai fait le schéma et j'ai commencé à trouver plusieurs petits résultats en utilisant les techniques que j'ai apprises en travaillant sur les BMO et les écrire sur la marge. Puis en fusionnant quelques résultats, j'ai exhibé un début de preuve que j'ai complété pour résoudre le problème. Contrairement à la veille, j'ai pris le temps de relire et vérifier ma preuve. Cette fois c'était bon, j'avais résolu le P4. Ça m'avait pris 1h30. J'ai essayé de travailler sur le P5 mais je n'arrivais pas à bien comprendre le problème. J'ai passé de trente à quarante minutes à essayer de le comprendre et de le résoudre mais en vain. Il me restait 2 heures. Que faire ? Essayer le P6 ? Je savais que c'était excessivement dur et que seulement quelques participants y arrivaient, mais j'ai quand même décidé de m'y mettre. Comme attendu, je ne trouvais pas trop par où commencer. Au bout d'une heure de travail, j'ai commencé à utiliser des résultats sur les graphes planaires, que j'avais lus quelques jours avant le départ, et qui me donnaient quelques pistes. J'ai décidé de continuer dans cette voie. A la fin de l'épreuve, j'avais établi plusieurs petits résultats que j'ai rédigés.

En sortant de l'épreuve, j'étais plutôt content. Je ne pouvais plus avoir de médaille de bronze mais je m'étais battu jusqu'au bout. Je n'ai pas été intimidé par l'exercice de géométrie et je me suis battu avec le P6 malgré sa réputation. Je pouvais avoir une mention. En consultants les premières solutions sur AOPS (Art of Problem Solving), j'ai trouvé une solution pour le P6 utilisant les graphes planaires. J'avais une chance d'avoir quelques points sur le P6.

Après l'effort, le réconfort !

C'était fini. Les tests étaient terminés, il ne restait plus qu'à attendre les résultats. Les jours suivants étaient des jours de détente. Les organisateurs nous ont fait visiter des lieux touristiques de Cape Town : le cap de Bonne-Espérance (le bout de l'Afrique), le musée national du rugby, les pingouins du Cap, le grand aquarium de la ville, ... C'était très agréable. On passait beaucoup de temps avec les autres équipes, on découvrait leurs cultures, on échangeait des cadeaux... Je garde encore contact avec plusieurs d'entre eux : Hong Kong, Syrie, Afrique du Sud, Australie, Tunisie, France...

Pendant les visites, les résultats sont tombés. J'avais eu 3 points au P1 et 7 points au P4. J'ai réussi à avoir une mention honorable mais j'ai raté la médaille. Mon P6 n'a pas été considéré par les encadrants de mon équipe donc n'a pas été consulté par le jury, c'était dommage. Pour le reste de l'équipe, on a eu quatre mentions honorables au total.

La vie après les IMO

C'était une expérience certainement inoubliable ! Je n'ai regretté aucun instant du temps que j'ai passé pour pouvoir y participer. J'aurais même aimé y consacrer plus de temps. Les IMO m'ont permis d'ouvrir les yeux sur un tout nouveau monde : loin des petits examens dans ma classe, il y avait de grands matheux se préparant à de grandes compétitions, le défi est plus grand qu'on ne le pense. J'ai pu également faire de superbes rencontres, des personnes que j'ai rencontrées à nouveau plus tard : dans ma prépa, dans mon école, dans certains projets... Les IMO m'ont aussi ouvert plusieurs voies. J'ai pu avoir plusieurs opportunités qui ne se seraient jamais présentées à moi sans mon expérience aux IMO : je n'aurais jamais pu être pris au lycée Louis Le Grand sans avoir parlé des olympiades dans mon dossier, et je n'aurais jamais pu avoir les facilités que j'ai eues en prépa et qui m'ont permis d'être admis aux meilleures écoles sans l'entraînement que j'ai suivi pour les IMO.

Remerciements

Enfin, il va sans dire que plusieurs personnes m'ont soutenu pendant cette expérience et que je tiens donc à les remercier : ma famille, mes amis, les anciens et plusieurs professeurs dont M. Aassila qui a particulièrement été présent pour nous pendant cette période et qui le sera sûrement encore pour les futurs participants.

Vol. 1, No. 1, 2017, pp. 9–13

INÉGALITÉS

L'inégalité arithmético-géométrique

Houssam Akhmouch, Mohamed El Alami

Les inégalités constituent un aspect important des mathématiques olympiques. Même si elles n'apparaissent pas très souvent durant les compétitions internationales, nous avons décidé de commencer par elles car elles sont facilement approchables. De plus, elles constituent un bon lien entre les mathématiques méthodiques du lycée et la créativité propre aux mathématiques olympiques.
Comme dans toutes les autres branches des mathématiques, le domaine des inégalités repose sur des principes simples, plutôt évidents, qui permettront de démontrer par la suite de puissants théorèmes et enfin d'établir des résultats assez globaux.

Proposition 1. Le carré d'un nombre réel est toujours positif, et il ne vaut zéro que lorsque le nombre réel de départ est 0.

La proposition ci-dessus est une propriété des nombres réels qui est une conséquence de leur construction. L'exemple suivant montre comment cette propriété peut être utilisée pour avoir un résultat plus fort :

Exercice 1. Soient a et b deux réels. Montrer que $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Solution : Pour montrer le résultat voulu, on considère a et b deux réels quelconques. Notre but est de montrer que $a^2 + b^2 - 2ab$ est supérieur ou égal à 0, i.e, positif. Mais $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$ qui est le carré du nombre réel $a - b$. En utilisant la proposition 1, on conclut que $a^2 + b^2 - 2ab$ est positif. De plus, la proposition 1 nous indique qu'il y a égalité seulement lorsque $a = b$ □

Nous remarquons ici une curiosité des mathématiques. En effet, nous avons utilisé la proposition 1 pour résoudre l'exercice, mais le résultat de l'exercice est plus général ! Si nous prenons $b = 0$, nous revenons à la proposition 1 car alors, pour tout nombre a, $a^2 \geq 0$.
Le résultat de l'exercice 1 est très utile et permet de démontrer beaucoup d'autres résultats. Par exemple, si x est un réel positif non nul, en posant $a = \sqrt{x}$ et $b = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, on obtient le cas particulier suivant :

$$\boxed{\text{Si } x \text{ est un réel positif non nul, alors } x + \frac{1}{x} \geq 2, \text{ et il y a égalité si et seulement si } x = 1.}$$

Nous laissons au lecteur la démonstration du cas d'égalité. À titre d'entraînement, le lecteur peut par exemple utiliser une approche similaire pour résoudre les exercices suivants :

Exercice 2. Soit x un nombre réel positif non nul. Montrer que $x + \dfrac{4}{x} \geq 4$. Quand y a-t-il égalité ?

Exercice 3. Soit x un réel positif non nul. Montrer que $x^3 + \dfrac{3}{x} \geq 4$. Quel est le cas d'égalité ?

Nous pouvons obtenir un autre résultat si nous appliquons l'exemple 1 simultanément aux paires (a, b), (b, c) et (c, a), où a, b et c sont des réels.

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &\geq 2ab \\ b^2 + c^2 &\geq 2bc \\ c^2 + a^2 &\geq 2ca \end{aligned}$$

En sommant membre à membre puis en divisant par 2 nous obtenons le résultat suivant :

$$\boxed{\text{Soient } a, b \text{ et } c \text{ trois réels, alors : } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca}$$

Par ailleurs, il y a égalité si et seulement si $a = b = c$.
Le cas d'égalité est laissé en exercice au lecteur.
En suivant le même raisonnement, le lecteur peut résoudre l'exercice suivant :

Exercice 4. Soient x, y et z trois réels. Montrer que :

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \geq xyz(x + y + z)$$

Quel est le cas d'égalité ?

Les exemples ci-dessus sont représentatifs de l'esprit à avoir pour les inégalités en mathématiques olympiques. Nous essayons d'établir des résultats plus forts en combinant de manière judicieuse les résultats plus élémentaires que nous avons. Nous allons maintenant présenter l'une des inégalités les plus utilisées pour résoudre les problèmes d'olympiade. Il s'agit de l'inégalité arithmético-géométrique (ou **IAG**).
Nous rappelons le résultat de l'exemple 1 : étant donnés deux réels a et b, on a : $a^2 + b^2 \geq 2ab$. Maintenant, si nous disposons de réels ***positifs*** x_1 et x_2, nous pouvons remplacer a par $\sqrt{x_1}$ et b par $\sqrt{x_2}$ afin d'obtenir le résultat suivant :

Proposition 2. Pour tous réels positifs x_1 et x_2, on a : $\dfrac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1x_2}$, avec égalité si et seulement si $x_1 = x_2$.

De même, étant donnés quatre réels positifs x_1, x_2, x_3 et x_4, nous utilisons la proposition 2 consécutivement pour (x_1, x_2) et (x_3, x_4). Puis en sommant, nous obtenons :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 2\sqrt{x_1x_2} + 2\sqrt{x_3x_4}$$

Puis, en appliquant la proposition à la paire $(\sqrt{x_1x_2}, \sqrt{x_3x_4})$, nous avons :

$$\sqrt{x_1x_2} + \sqrt{x_3x_4} \;\geq\; 2\sqrt{\sqrt{x_1x_2}\sqrt{x_3x_4}} \;=\; 2\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}.$$

Pour conclure, nous obtenons :

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \geq \sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}$$

Le lecteur remarquera qu'en appliquant la même méthode, nous pouvons montrer ce résultat pour 8 variables, 16 variables et même pour toute puissance de 2. Ceci motive donc le résultat suivant :

Théorème 1. **Inégalité arithmético-géométrique**
Soient $x_1, x_2, \cdots, x_n$ des réels positifs. Alors :

$$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$$

Avec égalité si et seulement si tous les x_i sont égaux.

Les résultats précédents nous montrent pourquoi le théorème est vrai dans le cas des puissances de 2 ($n = 2, 4, 8, 16, ...$). Par ailleurs, de manière assez magique, cela nous suffit pour montrer le théorème dans tous les autres cas ! Pour cela, nous allons montrer que si le résultat est vrai au rang $n+1$ alors il est vrai au rang n. Supposons que ceci est vrai, alors pour terminer la preuve nous remarquons que si le résultat est vrai pour un certain $N = 2^k, k \geq 0$, alors, il sera vrai pour $N-1$, $N-2$, $N-3$ etc., donc il sera vrai pour tous les nombres plus petits que N. Comme nous pouvons choisir des puissances de 2 aussi grandes que nous voulons, nous obtenons le résultat pour tout entier n. Montrons donc le résultat suivant : si la propriété est vraie au rang $n+1$, alors elle est vraie au rang n.

Démonstration : Soient x_1,..,x_n des réels positifs et posons $x_{n+1} = \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$, alors : $x_1 \cdots x_n = (x_{n+1})^n$. Puis, comme l'inégalité est vraie pour $n+1$, nous avons :

$$\begin{aligned} x_1 + ... + x_n + x_{n+1} &\geq (n+1) \sqrt[n+1]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n \cdot x_{n+1}} \\ &= (n+1) \sqrt[n+1]{(x_{n+1})^n \cdot x_{n+1}} \\ &= (n+1) x_{n+1} \end{aligned}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} x_1 + ... + x_n &\geq n x_{n+1} \\ &= n \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n} \end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve. Nous laissons la preuve du cas d'égalité en exercice au lecteur. □

L'inégalité arithmético-géométrique est très puissante et permet de résoudre un grand nombre de problèmes. Nous allons maintenant en explorer toutes les facettes. Mais avant tout, commençons par des applications simples.

Exemple 1. Soient a, b, c, d des réels positifs tels que $abcd = 1$, alors $a + b + c + d \geq 4$.

Nous appliquons l'IAG pour $n = 4$ variables, avec a, b, c et d. Il y a alors égalité lorsque $a = b = c = d = 1$. C'était une application directe. Dans la plupart des cas, ceci ne suffit pas et il faut un peu plus jouer avec les coefficients et les variables pour résoudre le problème. Voici un exemple :

Exemple 2. Parmi tous les triplets de réels positifs (a, b, c) tels que $ab^2c^3 = 1$, quelle est la valeur minimale atteinte par $a + b + c$?

Il s'agit d'un problème de minimisation. Nous pouvons y voir deux sous-problèmes. D'une part, nous devons trouver un certain η (indépendant de a, b et c) tel que chaque triplet de nombres satisfaisant la condition $ab^2c^3 = 1$ vérifie aussi $a + b + c \geq \eta$. D'autre part, nous devons nous assurer qu'il existe un triplet de réels positifs qui vérifient le cas d'égalité (bien entendu, ils doivent aussi vérifier la contrainte). L'IAG va nous aider à résoudre ce problème. Mais si nous l'appliquons naïvement, $a + b + c \geq 3\sqrt[3]{abc}$, nous n'allons pas réussir à conclure puisque la contrainte est donnée pour ab^2c^3 et non pas pour abc. Par conséquent, il semble plus intéressant d'utiliser l'IAG comme ceci :

$$\begin{aligned} a + b + c &= a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}c + \frac{1}{3}c \\ &\geq 6\sqrt[6]{\frac{ab^2c^3}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}} \\ &= \frac{6}{\sqrt[6]{108}} \end{aligned}$$

Nous laissons en exercice au lecteur la démonstration du cas d'égalité.
Nous espérons que cette présentation aura permis au lecteur de se forger une idée de l'esprit global des inégalités aux olympiades . Nous conseillons vivement aux lecteurs intéressés par les olympiades de

chercher les exercices suivants. Nous précisons également que même lorsque l'énoncé ne le mentionne pas explicitement, il faut déterminer le cas d'égalité.

- Parmi tous les réels positifs a, b, c et d tels que $abcd = 1$, quelle est la valeur minimale atteinte par $ab + bc + cd + da + ac + bd$?
- Parmi tous les triplets de réels positifs a, b et c tels que $abc = 1$, quelle est la valeur minimale atteinte par $a + b^2 + c^3$?
- Soit n un entier positif et soient $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ des réels. Montrer que

$$(a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + \cdots + a_nb_n)^2$$

Indication : Poser $A = a_1^2 + \cdots + a_n^2$ et $B = b_1^2 + \cdots + b_n^2$ alors, pour tout i, nous avons :

$$\frac{a_i^2}{A} + \frac{b_i^2}{B} \geq \frac{2a_ib_i}{\sqrt{A \cdot B}}$$

Après avoir lu et compris les techniques que nous avons introduites jusqu'à présent, le lecteur pourrait déjà entamer des exercices du niveau des Olympiades. Nous commençons par l'exercice suivant :

Exercice résolu : (Maroc 2011)

Soient a, b et c trois nombres réels positifs tels que $a + b + c = 1$. Montrer que :

$$9abc \leq ab + bc + ca \leq \frac{1}{4} + 3abc$$

Solution

Observer tout d'abord que :

$$ab + bc + ca = (ab + bc + ca)(a + b + c)$$

D'après l'IAG, on a :

$$a + b + c \geq 3(abc)^{1/3}$$

De même :

$$ab + bc + ca \geq 3(ab \cdot bc \cdot ca)^{1/3} = 3(abc)^{2/3}$$

Il s'ensuit, en faisant le produit, que :

$$ab + bc + ca \geq 9abc$$

ce qui démontre une des inégalités demandées. D'ailleurs, l'égalité dans cette inégalité aurait lieu pour le triplet $(1/3, 1/3, 1/3)$, ou bien le triplet $(0, 0, 1)$ et toutes ses permutations symétriques.
Pour l'autre côté, on pourra supposer sans nuire à la généralité du problème que $a \geq b \geq c$. Du fait que $a + b + c = 1$, on déduit que :

$$a \geq \frac{a + b + c}{3} = \frac{1}{3}$$

Et par conséquent, $3abc \geq bc$. Par ailleurs, l'IAG nous indique que :

$$ab + ac = a(b + c) = a(1 - a) \leq \left(\frac{a + 1 - a}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Ainsi :

$$ab + bc + ca \leq \frac{1}{4} + 3abc$$

Notre raisonnement montre que l'égalité aurait lieu si : $a = \frac{1}{2}$ et $bc = 0$. Donc pour le triplet

$$(a, b, c) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$$

et toutes ses permutations symétriques.

Exercice résolu : (OIM 1995)

Soient a, b et c des nombres réels positifs tels que $abc = 1$. Montrer que :

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Solution
D'après l'IAG, nous avons :

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{a(b+c)}{4} \geq \frac{1}{a} = bc$$

Le choix de diviser par 4 est inspiré par le cas d'égalité. De même, on montre que :

$$\frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{b(c+a)}{4} \geq \frac{1}{b} = ca$$

$$\frac{1}{c^3(a+b)} + \frac{c(a+b)}{4} \geq \frac{1}{c} = ab$$

En faisant la somme de ces trois inégalités, on trouve que :

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} + \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq ab+bc+ca$$

Il s'ensuit que :

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{1}{2}(ab+bc+ca)$$

Par ailleurs, l'IAG nous révèle que :

$$ab+bc+ca \geq 3(abc)^{2/3} = 3$$

On en déduit alors que :

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Avec égalité, comme pourra vérifier le lecteur, si et seulement si $a = b = c = 1$.

Vol. 1, No. 1, 2017, pp. 15–19

ARITHMÉTIQUE

Division euclidienne et décomposition en facteurs premiers

Mohamed El Alami

L'arithmétique est l'un des domaines demandant le plus d'astuce dans le monde olympique. Contrairement aux inégalités ou à la géométrie, il n'y a qu'un petit nombre de théorèmes à connaître avant de se lancer dans la résolution de problèmes olympiques. Après avoir acquis une bonne compréhension des nombres entiers et rationnels, la capacité à résoudre les problèmes repose essentiellement sur l'entraînement des compétiteurs. Dans cet article, le but sera de présenter les principes de l'arithmétique ainsi que certaines de leurs applications.
Tout d'abord, rappelons que l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs est constitué des éléments $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$. Parmi ces nombres, certains sont multiples d'autres. Par exemple, $-10 = (-2) \times (5)$, et donc -10 est un multiple de -2 et de 5. On peut aussi dire que 5 et 2 sont des diviseurs de 10. Formellement, nous obtenons la définition suivante :

Définition 1. *Soient m et n deux entiers relatifs, on dit que m divise n, et on note $m|n$, s'il existe un entier k tel que $n = k \times m$. Noter que cela implique en particulier que $|m| \leq |n|$ si $n \neq 0$.*

Proposition 1. Soient d, n_1 et n_2 des entiers relatifs.
1- Si d divise n_1, alors d divise cn_1 pour tout entier c.
2- Si d divise n_1 et n_2, alors d divise $n_1 + n_2$.

Un autre outil très important en arithmétique est la division euclidienne.

Théorème 1. *Soit $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ alors il existe un* unique *couple $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :*

$$a = q \times b + r \qquad r \in [\![0, b-1]\!]$$

Avec les notations précédentes, q s'appelle le quotient de la division euclidienne de a par b et r s'appelle le reste. Par ailleurs, il faut insister sur le fait que r doit forcément être positif et plus petit que b sinon nous n'avons pas d'unicité.

Exemple 1. La division euclidienne de -10 par 3 donne : $-10 = (-4) \times 3 + 2$ et non pas $-10 = (-3) \times 3 - 1$

Maintenant, étant donnés deux entiers n_1 et n_2, nous pouvons chercher le plus grand entier d qui divise les deux nombres. Il est appelé plus grand diviseur commun pgcd, noté $\text{pgcd}(n_1, n_2)$ ou $n_1 \wedge n_2$. Par exemple, le lecteur peut vérifier que $\text{pgcd}(15, 20) = 5$. Le pgcd peut donc être défini ainsi :

Définition 2. *Soient a et b deux entiers. Un entier $d \geq 0$ est appelé pgcd (plus grand commun diviseur) de a et b s'il vérifie la propriété suivante : pour tout entier d', si d' divise a et b alors d' divise d.*

Il y a un algorithme efficace qui permet de trouver le pgcd de deux nombres. Il s'agit de l'algorithme d'Euclide. Donnons-nous deux entiers m et n tels que $m \leq n$. Nous désirons calculer le pgcd de ces deux nombres. Pour cela, on fait la division euclidienne de n par m. Notons q et r le quotient et le reste respectivement. L'algorithme d'Euclide consiste à faire la division euclidienne de m par r (on note r' le reste), puis celle de r par r', etc. jusqu'à ce que le reste devienne 0. Alors le dernier reste non nul obtenu sera le pgcd de m et de n. Par exemple, si $n = 243$ et $m = 75$ alors, appliquer l'algorithme de la division euclidienne nous donne :

$$243 = 3 \times 75 + 18 \qquad 75 = 4 \times 18 + 3 \qquad 18 = 6 \times 3 + 0$$

Par conséquent, $\mathrm{pgcd}(243, 75) = 3$.
Pour les lecteurs ayant bien compris les notions précédentes, voici un joli exercice :

Exercice 1. Montrer que l'algorithme d'Euclide, présenté ci-haut, se termine en un nombre fini d'étapes.

Une conséquence importante de l'algorithme d'Euclide est le très important théorème de Bézout qui est laissé en exercice au lecteur.

Exercice 2. Théorème de Bézout
Soient m et n deux entiers relatifs, $d = \mathrm{pgcd}(m, n)$. Montrer qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $um + vn = d$.

Bien entendu, déterminer le pgcd par l'algorithme d'Euclide est plus efficace que d'établir la liste des diviseurs de chacun des deux nombres, puis trouver le plus grand des diviseurs communs. Toutefois, cette méthode n'est pas très transparente et ne permet pas une compréhension profonde des propriétés du pgcd. Une meilleure approche théorique pour obtenir le pgcd consiste à utiliser la décomposition en facteurs premiers d'un nombre. Nous allons l'expliquer maintenant.
Remarquons tout d'abord qu'un entier naturel N est toujours divisible par 1 et par lui-même et, éventuellement, par d'autres entiers positifs. Il existe un ensemble particulier de nombres que l'on appelle nombres premiers.

Définition 3. *Un nombre premier p est un nombre qui a exactement deux diviseurs positifs distincts : 1 et p.*

Par exemple, 13 est premier mais 51 n'est pas premier car il est divisible par 17. Un fait intéressant à noter est que les nombres premiers constituent les blocs élémentaires qui forment tous les autres nombres. Ce sont les atomes dans le monde des entiers ! Si nous avons N un entier naturel, soit il est premier, soit il admet des diviseurs différents de 1 et de lui-même, donc $N = ab$ avec $1 < a, b < N$. Puis en raisonnant ainsi par récurrence, on obtient que N admet une décomposition en facteurs premiers. Par exemple :

$$26650 = 10 \times 2665 = 2 \times 5 \times 5 \times 533 = 2 \times 5 \times 5 \times 13 \times 41.$$

Nous pouvons également regrouper les termes ensemble et écrire :

$$26650 = 2 \times 5^2 \times 13 \times 41.$$

Nous arrivons donc au théorème fondamental de l'arithmétique :

Théorème 2. *Tout entier naturel $N \geq 2$ admet une unique décomposition en facteurs premiers :*

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$$

Où $p_1 < \cdots < p_k$ sont des nombres premiers et $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ des entiers strictement positifs.

Démonstration : Les arguments explicités ci-dessus expliquent l'existence d'une décomposition. L'unicité est un peu plus subtile. La cause principale provient du fait que si p et q sont premiers, alors $\mathrm{pgcd}(p, q) = 1$. Puis une application du théorème de Bézout (exercice 2) nous permet de montrer que si $\mathrm{pgcd}(a, m) = \mathrm{pgcd}(b, m) = 1$, alors

$\text{pgcd}(ab, m) = 1$ (la preuve est laissée en exercice). Supposons maintenant que N possède deux décompositions en facteurs premiers :

$$N = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k} = q_1^{\beta_1} \cdots q_l^{\beta_l},\ p_1 < \ldots < p_k, q_1 < \ldots < q_l$$

Supposons par l'absurde qu'il existe un facteur premier q_j (noté q) du membre de droite qui n'apparaît pas dans le membre de gauche. Ceci voudrait dire que q est différent de tous les p_i et que pourtant $q|p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$. Toutefois, comme q est différent de tous les p_i, la première remarque ci-dessus nous indique que $\text{pgcd}(p_i, q) = 1$ pour tout i, tandis que la seconde remarque nous indique que $\text{pgcd}(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}, q) = 1$. Ceci est absurde. Ainsi : q_j est un certain p_i. C'est vrai pour tous les q_j du membre de droite, donc $l \leq k$. Par symétrie, on obtient que $k = l$ et que $p_1 = q_1, \ldots, p_k = q_k$. Supposons maintenant par l'absurde qu'il existe un certain i tel que $\alpha_i \neq \beta_i$. Par exemple, $\alpha_i > \beta_i$. En divisant N par $p_i^{\beta_i}$:

$$p_1^{\alpha_1} \cdots p_{i-1}^{\alpha_{i-1}} p_i^{\alpha_i - \beta_i} p_{i+1}^{\alpha_{i+1}} \cdots p_k^{\alpha_k} = p_1^{\beta_1} \cdots p_{i-1}^{\beta_{i-1}} p_{i+1}^{\beta_{i+1}} \cdots p_k^{\beta_k}$$

On applique alors à p_i le même argument que précédemment : p_i doit apparaître dans le membre de droite, ce qui n'est pas le cas. C'est absurde. Donc $\alpha_i = \beta_i$ pour tout i. Par conséquent, la décomposition en facteurs premiers est unique. □

Le théorème fondamental de l'arithmétique nous donne une vision très claire de la divisibilité en termes de facteurs premiers. Nous conseillons au lecteur de démontrer les propositions suivantes :

- Deux entiers m et n sont dits premiers entre eux s'ils n'ont aucun facteur premier en commun dans leurs décompositions en facteurs premiers. Ceci arrive si et seulement si $\text{pgcd}(m, n) = 1$.
- Soient $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ et $n = p_1^{\beta_1} \cdots p_k^{\beta_k}$ deux entiers. Nous autorisons les exposants valant 0. Alors m divise n si et seulement si : $\alpha_i \leq \beta_i$ pour $i = 1, 2, \cdots, k$.
- Avec les mêmes notations que précédemment, soit $\gamma_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$. Alors :
$$\text{pgcd}(m, n) = p_1^{\gamma_1} \cdots p_k^{\gamma_k}.$$
- Le plus petit multiple commun de m et n, noté $\text{ppcm}(m, n)$, peut être défini ainsi :
$$\text{ppcm}(m, n) = p_1^{\delta_1} \cdots p_k^{\delta_k},$$
où $\delta_i = \max\{\alpha_i, \beta_i\}$.
- Soient a, b et c des entiers et soit n un entier positif. Alors :
$$\text{pgcd}(ca, cb) = c \times \text{pgcd}(a, b) \qquad \text{pgcd}(a^n, b^n) = \text{pgcd}(a, b)^n.$$
- (Lemme de Gauss) Soient a, b et c des entiers tels que $a|bc$ et tels que a et b sont premiers entre eux. Alors $a|c$.

Ces propriétés doivent être parfaitement comprises et pour cela rien de mieux que de les démontrer. Voici un exemple d'application.

Exercice 3. Soient a et b des entiers premiers entre eux tels que ab est un carré parfait. Montrer que a et b sont également des carrés parfaits.

Solution : Écrire $ab = c^2$. En décomposant chacun des termes en facteurs premiers :

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}, \qquad b = p_{k+1}^{\alpha_{k+1}} \cdots p_{k+1}^{\alpha_{k+l}}, \qquad c = p_1^{t_1} \cdots p_{k+l}^{t_{k+l}}$$

où p_1, p_2 $\cdots$, p_{k+l} sont des nombres premiers distincts. Par unicité de la décomposition en facteurs premiers, on en déduit que : $\alpha_i = 2t_i$ pour tout i, ce qui implique également que :

$$a = \left(p_1^{t_1} \cdots p_k^{t_k}\right)^2 \qquad \text{et} \qquad b = \left(p_{k+1}^{t_{k+1}} \cdots p_{k+l}^{t_{k+l}}\right)^2.$$

Par conséquent, a et b sont des carrés parfaits. □

En utilisant un raisonnement analogue, le lecteur peut résoudre l'exercice suivant.

Exercice 4. Soient a et b des entiers premiers entre eux tels que ab est une puissance k-ème parfaite, montrer que a et b sont des puissances k-èmes parfaites.

Pour finir, nous montrons comment les techniques précédentes peuvent être utilisées pour résoudre des exercices du niveau des Olympiades.

Exercice résolu : (Maroc 2005)

Montrer que l'équation suivante :

$$3y^2 = x^4 + x$$

n'admet pas de solutions entières (x, y) strictement positives.

Solution

Supposons qu'au contraire, il y a une solution positive (x, y) pour l'équation proposée, qu'on peut alors réécrire comme :

$$3y^2 = x(x+1)(x^2 - x + 1)$$

Observer que :

$$\text{pgcd}(x, x+1) = \text{pgcd}(x, x^2 - x + 1) = 1$$

Alors que :

$$\text{pgcd}(x+1, x^2 - x + 1) = \text{pgcd}(x+1, (x+1)^2 - 3(x+1) + 3) = \text{pgcd}(x+1, 3)$$

Or puisque 3 est premier et divise $x(x+1)(x^2 - x + 1)$, il devra diviser soit x, soit $x+1$, soit $x^2 - x + 1$. Le calcul précédent de $\text{pgcd}(x+1, x^2 - x + 1)$ montre par contre que 3 divise $x^2 - x + 1$ si et seulement si 3 divise $x + 1$. Il s'ensuit qu'on a deux cas à considérer :

Cas 1 : 3 divise x.

Dans ce cas, on peut réécrire l'équation comme :

$$y^2 = \left(\frac{x}{3}\right)(x+1)(x^2 - x + 1)$$

Or les trois termes apparaissant dans le membre de droite de l'équation sont, comme nous l'avons montré, deux à deux premiers entre eux. Leur produit est un carré parfait, et donc chacun d'eux doit être un carré parfait. Il existe alors des entiers naturels (a, b, c) tels que :

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} &= a^2 \\ x + 1 &= b^2 \\ x^2 - x + 1 &= c^2 \end{aligned}$$

Pour obtenir une contradiction, nous nous contentons de la troisième équation, qu'on peut manipuler comme suit :

$$(2c)^2 = 4x^2 - 4x + 4 = (2x - 1)^2 + 3$$

Il s'ensuit que :

$$3 = (2c)^2 - (2x - 1)^2 = (2c - 2x + 1)(2c + 2x - 1)$$

On est alors arrivés à écrire 3 comme un produit de deux nombres $X = 2c - 2x + 1$ et $Y = 2c + 2x - 1$, et remarquons que $X + Y = 4c$ est multiple positif de 4. Par ailleurs, il n'y a que 2 façons d'écrire 3 comme un produit de deux nombres :

$$3 = 3 \times 1 = -3 \times -1$$

Seule la première satisfait la contrainte précédente. Nous en déduisons que :

$$2c - 2x + 1 = 3 \qquad \text{et} \qquad 2c + 2x - 1 = 1$$

ou bien :

$$2c - 2x + 1 = 1 \qquad \text{et} \qquad 2c + 2x - 1 = 3$$

Dans le premier cas, on trouve que $x = 0$, qui n'est pas strictement positif. Alors que dans le deuxième cas, on trouve $x = 1$ qui n'est pas un multiple de 3.

Cas 2 : 3 divise $x + 1$.
Ce cas suit encore les mêmes idées, sauf que maintenant on peut aboutir à une contradiction beaucoup plus facilement. En fait, il est n'est pas difficile de voir que :

$$\frac{x^2 - x + 1}{3} = (x+1)\left(\frac{x+1}{3} - 1\right) + 1$$

Il s'ensuit que $\frac{1}{3}(x^2 - x + 1)$ est un entier premier avec $x + 1$. Or, notre équation peut être réécrite comme :

$$y^2 = x(x+1)\left(\frac{x^2 - x + 1}{3}\right)$$

qui est encore un produit de trois entiers deux à deux premiers entre eux. Ainsi, chacun de ces entiers doit être un carré parfait. En particulier, x et $x + 1$ sont tout les deux des carrés parfaits. Or ceci n'est le cas pour aucun entier positif x.
Ce qui achève la preuve.

Vol. 1, No. 1, 2017, pp. 21–23

La beauté des mathématiques

Mouad Moutaoukil

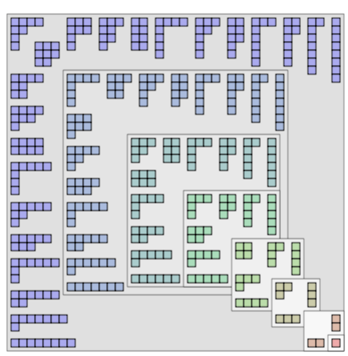
L'un des bénéfices que présente la participation aux OIM est le fait d'assister à quelques conférences très passionnantes. J'ai eu la chance, en tant que participant à la 56ème édition, d'assister à une conférence, animée par le professeur Ken Ono (1968 -), autour des partitions d'entiers. C'était alors la première fois que j'entendis parler de la théorie des partitions, théorie qui suscita vivement mon intérêt, par sa beauté et la simplicité de ses énoncés.

Nombre de partitions : Définitions

« Étant donné n amis et n bonbons, indiscernables, de combien de façons le partage peut-il être réalisé ? » C'est ainsi que le problème des partitions a été posé. En définissant le nombre de partitions d'un entier comme étant le nombre de façons de décomposer cet entier en somme de naturels ordonnés, calculer ce nombre, noté $p(n)$, est la question à laquelle s'intéresse la théorie des partitions. Formellement, on définit d'abord une partition d'un entier n comme étant une décomposition de la forme :

$$n = a_1 + \cdots + a_k$$

où $(a_i)_{1 \leq i \leq k}$ est une suite croissante d'entiers strictement positifs.



Diagrammes de Ferrers montrant les partitions des entiers de 1 à 8. (Wikipédia)

Le soin d'expliquer les diagrammes ci-dessous est laissé au lecteur.

Quelques résultats impressionnants

Le calcul du nombre des partitions s'est avéré très difficile, en effet :

- $1 = 1$, d'où $p(1) = 1$
- $2 = 2$, $2 = 1 + 1$, d'où $p(2) = 2$
- $3 = 1 + 1 + 1$, $3 = 1 + 2$, $3 = 3$, d'où $p(3) = 3$
- De la même façon, $p(4) = 5$, $p(5) = 7$, $p(7) = 11$...

Mais cette méthode marcherait évidemment assez mal pour $n = 200$, puisque $p(200) = 3972999029388$. Celle valeur a été calculée (à la main !) par Major MacMahon en 1917 en utilisant une formule récursive d'Euler.

Par la suite, Ramanujan (Srinivasa 1887-1920) et Hardy (Godfrey Harold 1877-1947) ont démontré certaines propriétés du nombre de partitions, dont une approximation et des congruences très intéressantes. Ramanujan, mathématicien d'exception, a révolutionné la théorie des partitions grâce à un grand nombre de théorèmes. Le lecteur intéressé pourrait regarder *The man who knew infinity*, film qui retrace sa vie, et que le professeur Ono nous avait présenté lors de sa conférence, en tant que collaborateur.

En calculant -par ordinateur- les premières 1000000 valeurs prises par la suite $(p(n))_{n\geq 1}$, Ono et certains de ses collègues ont remarqué une distribution très organisée ; en effet, presque exactement 50% des $p(n)$ sont paires, et l'autre moitié impaires ; le tiers congru à 0 modulo 3, un autre tiers à 1 modulo 3, et le reste à 2 modulo 3 ; en plus d'un résultat similaire pour les congruences modulo 5. En notant

$$\delta_r(M, X) = \frac{|\{0 \leq n < X, p(n) \equiv r[M]\}|}{X}$$

le tableau suivant[1] présente les valeurs exactes de l'étude menée par ces chercheurs :

X	$\delta_0(2; X)$	$\delta_1(2; X)$	$\delta_0(3; X)$	$\delta_1(3; X)$	$\delta_2(3; X)$
200 000	0,5012	0,4988	0,3332	0,3331	0,3337
400 000	0,5000	0,5000	0,3339	0,3324	0,3336
600 000	0,5000	0,5000	0,3337	0,3326	0,3337
800 000	0,5006	0,4994	0,3331	0,3333	0,3336
1 000 000	0,5004	0,4996	0,3330	0,3336	0,3334

Le problème des partitions, à l'instar de grands problèmes mathématiques, quoique s'énonçant très simplement, a donné lieu à des calculs compliqués, faisant intervenir plusieurs outils mathématiques avancés. En témoigne la formule :

$$p(n) = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)\sqrt{k}\frac{d}{dn}\left(\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{k}\sqrt{\frac{2}{3}\left(n - \frac{1}{24}\right)}\right)}{\sqrt{n - \frac{1}{24}}}\right)$$

où

$$A_k(n) = \sum_{\substack{m=0 \\ (m,k)=1}}^{k-1} e^{\pi i (s(m,k) - \frac{1}{k} 2nm)}$$

$(m, k) = 1$ signifiant que m ne doit prendre que les valeurs premières avec k, et la fonction $s(m, k)$ est une somme de Dedekind.

[1] *Congruences and conjectures for the partition function*, S. Ahlgren and K. Ono, Contemporary Mathematics volume 291, 2001

Les partitions d'entiers aux Olympiades

Les partitions constituent un très bon thème pour les exercices d'olympiades, elles ont été traitées dans pas mal de compétitions olympiques, dont cet exercice, pas très difficile, que le lecteur pourrait essayer de résoudre :

P4 IMO 1976 : Déterminer le plus grand produit d'entiers positifs de somme 1976.

Conclusion

Les débuts des partitions ont été extrêmement modestes, qui aurait dit en effet qu'un problème aussi naturel que celui du nombre de partitions serait aussi difficile et présenterait autant de connexions et de péripéties ? La fonction de partition a été connectée à plusieurs domaines centraux de la théorie des nombres, depuis les travaux d'Euler et la méthode des cercles de Ford à la théorie modernes des formes modulaires et L-fonctions. C'est aujourd'hui l'un des secteurs mathématiques les plus actifs, il serait passionnant de voir de nouvelles connexions naître et de nouveaux résultats prouvés ou conjecturés.

Vol. 1, No. 1, 2017, pp. 25–26

EXERCICES

Les élèves sélectionnés par le Ministère de l'Éducation Nationale pour préparer les Olympiades sont invités à nous envoyer les solutions aux problèmes suivants sur le site officiel de l'association Math&Maroc. Les traces de recherche, même si elles n'aboutissent pas à une solution complète, sont vivement appréciées et peuvent faire l'objet d'une correction.
Pour les autres lecteurs : les solutions élégantes sont bien sûr les bienvenues, même si leurs auteurs ne participent pas à la sélection des Olympiades. Ceux-là peuvent nous envoyer leurs résultats à l'adresse `redac.mathetmaroc@gmail.com`.
Toute proposition doit nous parvenir au plus tard le **17 avril 2017**. Les problèmes et les solutions seront publiés en français, mais vous pouvez soumettre vos solutions dans la langue de votre choix.

Inégalités

Exercice 1. Soient a, b et c des réels positifs tels que $a+b+c=3$. Montrer que :

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \geq 8$$

Exercice 2. Soient a, b et c des réels positifs tels que $abc=1$. Montrer que :

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq a+b+c$$

Arithmétique

Exercice 3.

1. Montrer que si x et y sont différents de 1, alors x^4+4y^4 n'est pas premier.
2. Montrer que si $n>1$, alors n^4+4^n n'est pas premier.

Exercice 4. Montrer que pour tout nombre premier p : si $p \geq 5$ alors 24 divise p^2-1

Divers

Exercice 5. Soit M un sous-ensemble fini de $\mathbb{R}$ contenant au moins 2 éléments. On dit qu'une fonction f vérifie la propriété $\boldsymbol{P}$ si :

$$f : M \longrightarrow M$$

et s'il existe $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) = ax + b$$

1. Montrer qu'il existe au moins une fonction vérifiant la propriété $\boldsymbol{P}$.

2. Montrer qu'il y a au plus deux fonctions vérifiant la propriété $\boldsymbol{P}$.
3. Si M contient 2003 éléments dont la somme fait 0 et s'il existe deux fonctions vérifiant la propriété $\boldsymbol{P}$, montrer que $0 \in M$.

Exercice 6. Un entier $n \geq 2$ est dit académique si on peut répartir les entiers $1, \ldots, n$ en deux groupes disjoints S et P, de sorte que la somme des nombres du groupe S soit égale au produit des nombres du groupe P. Montrer que pour $n \geq 7$, n est académique.