Vol. 1, No. 3, 2017, pp. 1–7

Math&Maroc est une revue mathématique publiée par l'association du même nom. Elle propose des cours et des problèmes à résoudre de niveau secondaire.
Nous vous invitons à nous envoyer tous vos commentaires, remarques et suggestions en nous contactant à l'adresse redac.mathetmaroc@gmail.com.
Nous sommes aussi intéressés par de nouveaux problèmes. Tout problème proposé devrait s'accompagner d'une solution, ou au moins d'informations suffisantes pour indiquer qu'une solution est possible. Veuillez inclure toute référence ou réflexion qui pourrait aider les rédacteurs et rédactrices. Nous vous invitons particulièrement à envoyer des problèmes originaux. Toutefois, tout problème intéressant quoique non original est le bienvenu pour autant qu'il soit accompagné des références nécessaires. Dans ce cas-là, il faut obtenir la permission de l'auteur avant de publier le problème.
Le journal est aussi ouvert à de nouveaux articles ou de nouveaux cours. Les articles devraient être soigneusement rédigés et raisonnablement courts. Ils devraient être d'un niveau accessible à des élèves de collège ou de lycée.
N'hésitez pas à nous contacter pour toute information complémentaire.

Sommaire

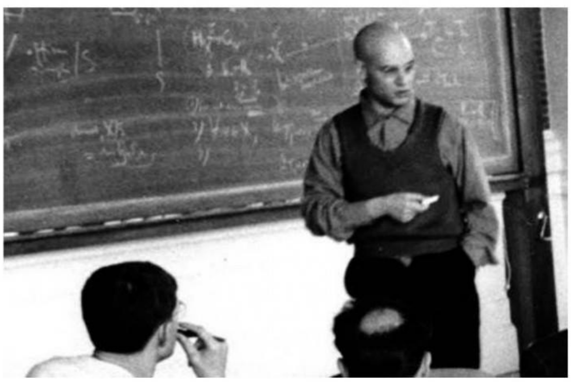
Éditorial

Si l'été est pour beaucoup synonyme de vacances, c'est aussi la période des Olympiades Internationales de Mathématiques ! Toutefois, les deux peuvent se conjuguer. C'est ainsi que les *mathlètes* marocains participent aux Olympiades de 2017 qui se tiennent à Rio de Janeiro, destination estivale par excellence pour de belles vacances en perspective. De notre côté, nous poursuivons la publication de *Math&Maroc* afin de préparer les compétitions à venir. Au programme de ce numéro : des équations fonctionnelles et la présentation de techniques d'*invariants*, mais aussi une sublime égalité due à Euler, la vie du plus grand mathématicien du siècle dernier et l'interview d'un ancien participant aux Olympiades devenu polytechnicien. Le tout est accompagné par une batterie d'exercices comme d'accoutumée. Alors profitez de vos congés, reposez-vous bien et pratiquez les mathématiques !

Assil Fadle

Portrait d'un mathématicien : Alexandre Grothendieck

Alexandre Grothendieck, considéré comme le père de la géométrie algébrique, a vu le jour le 28 mars 1928 à Berlin. Longtemps apatride, il passe une longue partie de sa vie en France et est naturalisé français en 1971. Ses travaux ont fortement marqué les mathématiques modernes et surtout la géométrie algébrique et l'analyse fonctionnelle. Désigné comme le plus grand mathématicien du XXème siècle et souvent comparé à Einstein, il est mort le 13 novembre 2014 à Lasserre en France après une réclusion quasi totale du monde.



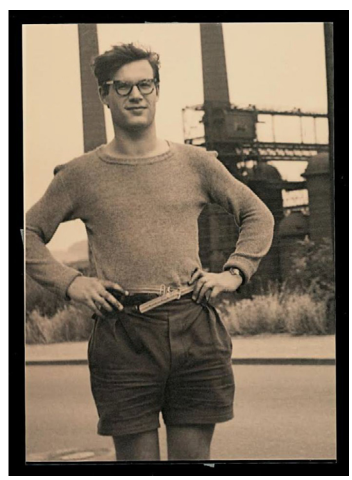
Une enfance épouvantable

Grothendieck passe une enfance marquée par la guerre, la misère et l'abandon. Ses deux parents étaient anarchistes -lui même le deviendrait après : son père un révolutionnaire ukrainien d'origine juive et sa mère une journaliste anarchiste allemande. Grothendieck a 4 ans quand il est abandonné, au sein d'une famille luthérienne, par ses parents fuyant l'Allemagne nazie. En 1939, abandonné une deuxième fois, il retrouve ses parents réfugiés en France. Arrêté peu après, son père sera assassiné en 1942 à Auschwitz.

Le jeune Alexander est enfermé avec sa mère dans les baraquements misérables du camp de Rieucros, en Lozère. Surdoué depuis son enfance, on raconte qu'il a été capable de retrouver une valeur approximative de π ($\simeq$ 3), après qu'une détenue lui aurait donné la définition d'un cercle. Il est ensuite séparé de sa mère, qui contractera une tuberculose dans le camp, cause de sa mort survenue en 1957, et il est caché au Collège Cévenol du Chambon-sur-Lignon, où il passe son baccalauréat.

Une passion pour les mathématiques

Le talent de Grothendieck pour les mathématiques est reconnu pour la première fois par un professeur avisé qui l'incite à se rendre à l'École Normale Supérieure après l'obtention de sa licence à l'université de Montpellier.



Il est alors dirigé vers Jean Dieudonné et Laurent Schwartz afin de préparer sa thèse. Dieudonné et Schwartz, pour tester les capacités de Grothendieck, lui soumettent quatorze problèmes ouverts. Deux mois plus tard, il revient avec la moitié des réponses. Quatre mois de plus lui suffisent pour tout résoudre. C'est le début d'une carrière mathématique qui sera couronnée, entre autres, par la médaille Fields en 1966 et le prix Crafoord en 1988, tous deux refusés par le mathématicien.

Grothendieck soutient sa thèse parmi six qu'il aurait préparées en seulement une année. Il intègre ensuite le groupe de Nicolas Bourbaki où il restera plusieurs années. Après des travaux remarquables en analyse fonctionnelle, il se tourne, sous l'influence de Jean-Pierre Serre, vers la géométrie algébrique. Il révolutionne ce domaine en établissant de nouvelles fondations et en introduisant la notion de schéma.

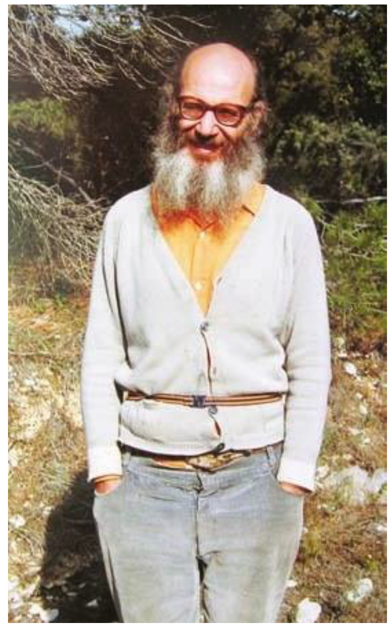
Entre 1960 et 1967, alors chercheur à l'IHES (Institut des hautes études scientifiques) et au zénith de sa gloire, il commence à rédiger les *Éléments de géométrie algébrique*, en collaboration avec Jean Dieudonné.

Fin de vie à Lasserre : déclin et réclusion

Grothendieck passe les 23 dernières années de sa vie exclu de la société. Il rompt avec les institutions et démissionne de l'IHES, qu'il accuse de toucher une subvention du ministère de la défense (5% du financement de l'établissement). Il s'investit corps et âme dans l'écologie, et dénonce avec virulence la société industrielle. Il part dans le sud de la France et rédige une autobiographie de mille pages, *Récoltes et Sémailles*, refusée par les éditeurs et actuellement disponible sur internet. Il s'installe dans le petit village de Lasserre, en Ariège, refusant tout contact avec ses proches, ses anciennes relations et les journalistes qui viennent des quatre coins du monde. Jusqu'à sa mort à l'hôpital de Saint-Girons en novembre 2014, il reste enfermé avec ses plantes, sans pour autant totalement rompre avec les mathématiques, puisqu'il laisse 65000 pages de notes, trouvées dans sa maison après son décès.

100 000 pages de notes inédites

Grothendieck avait laissé derrière lui 100 000 pages de notes auxquelles personne n'avait eu accès. Aux 65 000 pages soigneusement enfermées dans une quarantaine de boîtes dans sa maison de Lasserre, il fallait ajouter 28 000 pages de Montpellier, qui sont devenues accessibles au public après qu'un accord eut lieu, en mai 2017, entre l'université de Montpellier et la famille du mathématicien. Si la question des archives de Montpellier est réglée, il reste maintenant à trouver une solution pour les 65 000 pages de Lasserre. La valeur des ces notes est indiscutable, la plupart des mathématiciens les considèrent comme un véritable trésor qui révolutionnerait éventuellement les mathématiques modernes.



Le coin des anciens : Omar El Housni

Ce mois-ci, nous recevons dans *Math&Maroc* Omar El Housni, un ancien participant aux Olympiades Internationales de Mathématiques (IMO) de 2010, qui nous fait part de son expérience et de son attrait pour les mathématiques.

Une présentation rapide ?

Je suis doctorant et chercheur en Mathématiques Appliquées à l'Université Columbia à New York. Je suis aussi diplômé de l'École Polytechnique (Paris, Promotion 2012) et lauréat d'un Master of Science de l'Université Columbia en Recherche Opérationnelle. Je travaille sur des sujets de recherche liés à l'Optimisation Robuste et Adaptative, la Programmation dynamique, les Algorithmes d'approximation et les applications en Revenue Management. En particulier, ma thèse porte sur le développement d'algorithmes et de solutions mathématiques robustes pour les problèmes d'optimisation et de décision sous incertitude.

D'où provient ton intérêt pour les mathématiques ?

Il s'est construit lorsque j'étais encore très petit. D'abord, mon père m'a appris beaucoup d'astuces de calcul mental alors que j'avais encore 5 ans ou 6 ans. Il m'a présenté les chiffres comme étant des objets fascinants avec lesquels je m'amusais à faire des opérations élémentaires et qui me permettaient de développer un sens logique. Ensuite, je trouvais du plaisir à résoudre des problèmes mathématiques simples à l'école primaire et au collège. En particulier, j'étais fasciné par la beauté de la géométrie euclidienne qu'on nous enseignait au collège.

Je n'oublierai jamais mes premiers pas et raisonnements géométriques. Bien que les concepts mathématiques soient simples au collège, ils m'ont été d'une grande utilité plus tard. J'ai eu la chance d'avoir un professeur de maths au collège qui m'encourageait à aller au-delà du programme scolaire et m'exposait à quelques défis mathématiques de temps en temps.

Quand as-tu entendu parler des IMO ?

Pendant ma dernière année de collège, j'ai participé à une compétition des Olympiades de Mathématiques organisée à l'échelle de ma ville, Tétouan. Les exercices étaient stimulants et plus exigeants que ceux présentés dans le programme scolaire. J'étais très heureux d'avoir fini premier dans cette compétition.

Peu après, mon père qui travaillait à la délégation d'enseignement de Tétouan a entendu parler d'une compétition similaire qui s'organisait au niveau international pour les élèves de Terminale et à laquelle le Maroc participe chaque année : les Olympiades Internationales de Mathématiques. J'ai alors commencé à me renseigner sur cette compétition sur Internet. À cette époque je ne comprenais rien aux problèmes proposés sur le site des IMO mais je m'amusais à regarder les performances des différents pays et surtout du Maroc.

Vers fin 2007, c'est-à-dire trois ans avant que je participe, on a annoncé que l'édition 2010 des IMO serait organisée au Kazakhstan. À ce moment, je me suis dit : « Il faut absolument que je visite ce pays ». J'avais très envie de représenter mon pays dans cette prestigieuse compétition internationale. La participation aux IMO est devenue un rêve.

Comment t'es-tu préparé à la compétition ?

Honnêtement, la préparation aux IMO du Maroc laisse beaucoup à désirer. En particulier, le manque d'orientation, de ressources pédagogiques et de stages de préparation met les candidats face à beaucoup de difficultés. Au début, j'ai pu réussir sans aucune préparation les épreuves régionales en Tronc Commun et en première année Bac. Je me basais simplement sur les concepts basiques de géométrie que j'avais appris au collège et sur quelques inégalités élémentaires du lycée, ce qui m'a permis de me qualifier aux épreuves nationales en Terminale.

Deux mois avant le début des épreuves nationales, j'ai jeté un coup d'oeil sur quelques épreuves des IMO, et à ce moment j'ai découvert que mon niveau était encore très loin du niveau international. J'ai ainsi contacté deux amis qui venaient de participer aux IMO 2009, grâce auxquels j'ai découvert le site d'Animath et le forum Math-Maroc. Avec grande surprise j'ai trouvé sur le forum des dizaines d'étudiants de mon âge qui préparaient aussi la compétition. Ils avaient un niveau beaucoup plus avancé que moi et discutaient des problèmes compliqués alors que je ne connaissais même pas l'inégalité de Cauchy-Schwarz à cette époque ! Ça m'a beaucoup motivé et j'ai commencé ma préparation individuelle en me basant surtout sur les cours du site Animath et les exercices postés sur le forum.

Cette préparation a-t-elle été efficace ?

Grâce à elle, j'ai acquis un bon niveau technique qui m'a permis de réussir les premiers tests sélectifs nationaux et de me qualifier au premier stage national. J'ai terminé deuxième à ce stage, ce qui était satisfaisant mais j'ai réalisé aussi que j'avais beaucoup de lacunes en arithmétique. Après le premier stage, il restait une quinzaine de candidats sur le plan national, tous très forts et j'étais conscient qu'obtenir une place parmi les six membres de l'équipe nationale n'allait pas être facile.

C'est là que la vraie préparation a commencé. J'ai découvert le forum *Art of Problem Solving*, j'ai téléchargé quelques livres en ligne et mes parents m'en ont acheté d'autres de France. Je consacrais la majorité de mon temps à étudier des problèmes d'Olympiades et le minimum nécessaire pour préparer les épreuves du Bac. Je me rappelle très bien que je passais des heures, voire des jours, à contempler une seule figure géométrique parmi les problèmes du bouquin *300 Défis Mathématiques*. La concurrence était très élevée pendant les deuxième et troisième stages de qualifications. J'ai attendu avec une grande impatience le moment de l'annonce des résultats. Ma joie était énorme lorsque j'ai appris que j'étais qualifié aux IMO 2010 pour représenter le Maroc avec cinq autres étudiants. Le rêve était devenu réalité.

L'équipe marocaine des IMO de 2011

Quel souvenir gardes-tu des Olympiades ?

Je garde beaucoup de souvenirs des IMO. Le moment le plus émouvant était celui où je suis monté avec l'équipe nationale sur scène pendant la cérémonie d'ouverture des IMO à Astana, capitale du Kazakhstan. J'étais le porte-drapeau du Maroc. C'était un moment de fierté nationale. Il y avait des candidats venant d'une centaine de pays du monde.

En discutant avec les autres participants, j'ai rapidement réalisé que la préparation aux IMO au Maroc était très médiocre et que malheureusement les IMO étaient la dernière priorité du Maroc. En effet, d'autres pays organisent des stages de préparation de haut niveau encadrés par des mathématiciens célèbres et déploient de grands moyens pour préparer leurs étudiants. Malgré tout cela, j'avais très envie de faire un bon résultat et de bien représenter mon pays. Je me suis donné à fond pendant les épreuves.

Comment se sont déroulées ces épreuves ?

Le premier jour, nous étions tous installés dans un grand gymnase. J'ai commencé la première épreuve de quatre heures et demi avec beaucoup de détermination. Le premier problème (P1) était une équation fonctionnelle, P2 portait sur la géométrie et P3 sur l'arithmétique. J'étais surexcité, je voulais finir P1 rapidement et me jeter sur le problème de géométrie. Effectivement, j'ai pu réussir rapidement le premier problème en moins d'une heure. Mais j'ai décidé de le rédiger plus tard : je voulais commencer dès que possible la géométrie qui est mon point fort. Le problème n'était pas trivial, je me suis donné à fond, j'ai réussi à démontrer quelques résultats intermédiaires sans arriver au résultat final.

À une heure de la fin de l'épreuve, j'ai commencé à rédiger le premier exercice. Oups : je découvre qu'il y a une erreur vers la fin de ma solution ! J'ai mis du temps à la rectifier, je commençais à stresser, j'ai à peine eu le temps de finir la rédaction du premier problème, ce qui ne m'a pas laissé le temps d'écrire mes résultats intermédiaires du deuxième problème. La mauvaise gestion du temps m'a fait rater quelques points.

Le lendemain, P4 portait sur la géométrie, P5 était un problème de combinatoire et je ne me rappelle plus du dernier problème... J'ai résolu la géométrie en moins de 20 minutes et, contrairement à la veille, j'ai bien rédigé ma solution avant de passer au deuxième. Malheureusement, la combinatoire constituait alors le pire problème pour un candidat marocain. J'ai passé le reste du temps sur le P5. Il était très dur. À un moment, j'ai jeté un coup d'œil au fond de la salle. J'ai vu mon ami Salim à moitié endormi sur sa feuille. J'ai compris qu'il avait fini l'exercice de géométrie et qu'il n'y avait plus d'exercices à résoudre pour nous autres Marocains.

À la fin, j'ai eu une mention honorable avec 13 points, ce qui était très satisfaisant pour moi. On a aussi eu dans l'équipe marocaine une médaille de bronze et deux autres mentions honorables. Nous étions globalement très satisfaits : c'était le meilleur résultat du Maroc depuis 2004.

À quoi t'a servi l'expérience des Olympiades par la suite ?

D'abord, les Olympiades m'ont donné une grande motivation et des facilités pour continuer mes études en mathématiques. En particulier, j'ai trouvé plusieurs cours d'analyse en classes préparatoires faciles avec le bagage mathématique que j'avais accumulé pendant les Olympiades. L'expérience des IMO m'a aussi permis de rencontrer des étudiants passionnés par les maths de tous les coins du monde et de lier des relations d'amitié par la suite.

Si tu devais donner des conseils aux nouveaux participants, quels seraient-ils ?

Je pense que le Maroc a commencé à améliorer le processus de préparation des Olympiades, surtout avec la création de l'association Math&Maroc. Je conseille aux étudiants intéressés par les Olympiades de commencer leur préparation très tôt, de visiter les forums internationaux de maths et de se battre jusqu'à la dernière minute pendant les épreuves. Très bon courage !

Vol. 1, No. 2, 2017, pp. 8–11

LE PRINCIPE D'INVARIANCE

Omar Mouchtaki

Le principe d'invariance est une stratégie très utile en mathématique. Elle s'applique pour la résolution de problèmes qui peuvent être très complexes lorsqu'elle n'est pas repérée. Cette méthode est donc à garder dans un coin de l'esprit puisqu'elle s'utilise dans des domaines assez divers de même que le principe des tiroirs précédemment présenté.

Qu'est-ce que le principe d'invariance ?

Lorsque on est face à un problème qui met en jeu un algorithme, c'est à dire la répétition de certaines transformations, on essaye de trouver une grandeur qui se conserve. Pour les physiciens c'est un peu comme le principe de conservation de l'énergie mécanique, ou le principe de conservation de la matière en chimie. Le fait de savoir que quelque chose ne change pas nous donne des propriétés sur l'état final du problème.

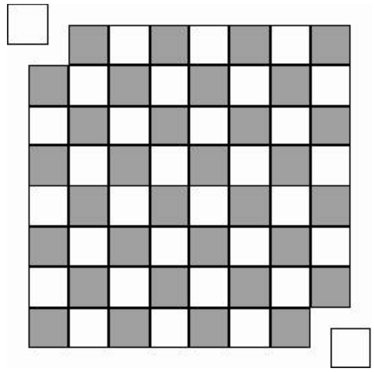
Pour bien comprendre ce principe, il faut, comme souvent en mathématiques olympiques, voir plusieurs exemples.

Exemple 1. On considère un échiquier 8×8 auquel nous avons enlevé la case en haut à gauche. Peut-on le paver avec des dominos ?

La réponse est non. Nous allons démontrer cela à l'aide du principe d'invariance. Un domino recouvre exactement deux cases de l'échiquier. Par conséquent, à chaque fois que nous posons un domino, la parité du nombre de case qu'il reste à paver ne change pas car si n est un entier, n et $n-2$ ont même parité. Or notre échiquier a 63 cases au début. Donc après chaque étape, il restera un nombre impair de case à recouvrir. A la fin du processus, il restera un nombre impair de case à recouvrir et comme 0 est pair, nous n'arriverons jamais à tout recouvrir.

Remarque 1. Cet exemple montre déjà une grande particularité du principe d'invariance qu'il faudra toujours avoir en tête : il permet de montrer que quelque chose est **impossible**! En effet, on ne peut pas montrer que quelque chose existe par invariant mais seulement qu'elle n'existe pas car elle a une propriété qui ne colle pas avec l'invariant. Ce deuxième exemple permettra de comprendre cette remarque.

Exemple 2. On considère un échiquier 8×8 auquel nous avons enlevé les deux coins opposés comme le montre la figure ci-dessous. Peut-on paver cet échiquier avec des dominos ?



Dans ce cas, si on prend le même invariant que tout à l'heure, nous obtenons qu'à la fin, il est possible qu'il reste 0 case puisqu'on commence avec 62 cases. Toutefois, il ne faut surtout pas se dire que, parce que cet invariant est bon, nous pouvons créer un pavage qui répond à la question ! Nous allons même montrer qu'on ne peut pas paver cette figure. Cette fois, la démonstration est un peu plus subtile et l'invariant que l'on va considérer va passer par le coloriage de notre échiquier en cases blanches et noires. Vous remarquez que nous avons enlevé 2 cases blanches. Donc il nous reste 30 cases blanches et 32 cases noires. On remarque également que lorsqu'on pose un domino, il couvre nécessairement une case blanche et une case noire. Donc, si on appelle b le nombre de cases blanches et n le nombre de cases noires, à chaque étape, $b-n$ est conservé. C'est notre *invariant*. Comme au début $b-n=2$, on obtient à la fin de notre pavage le même résultat. Donc il va forcément rester au moins 2 cases blanches qui ne seront pas recouvertes.

Bilan : Ce qu'il faut retenir de ces deux exemples est que le principe d'invariant montre aisément que quelque chose est impossible mais qu'il n'est pas efficace pour montrer l'existence d'un objet. De plus, il est important de trouver le bon invariant pour résoudre un problème donné. Bien sûr, certaines fois plusieurs invariants peuvent mener à la solution.

Nous allons maintenant essayer de voir des invariants dans plusieurs domaines pour apprendre à reconnaître plus facilement ce type d'exercice.

Lorsqu'on étudie des suites définies par récurrence, la notion d'invariant peut nous aider à comprendre le comportement de la suite.

Exemple 3. Soit a et $b \in \mathbb{R}$ tels que $0 < b < a$. On considère deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les relations suivantes :

$$x_n = a, \qquad y_n = b, \qquad x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}, \qquad y_{n+1} = \frac{2x_n y_n}{x_n + y_n}$$

Le but est de trouver la limite de ces suites.

Toute personne habituée à l'étude des suites et voyant deux suites comme celles-ci va essayer de voir si elles ne sont pas adjacentes[1]. Nous remarquons que $y_0 < x_0$. Nous allons montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geq y_n$. D'après l'inégalité arithmético-géométrique :

$$y_{n+1} = 2\frac{x_n y_n}{x_n + y_n} \leq 2\frac{(\frac{x_n+y_n}{2})^2}{x_n + y_n} = \frac{x_n + y_n}{2} = x_{n+1}$$

[1]Deux suites (x_n) et (y_n) sont dites adjacentes si (x_n) est croissante, (y_n) est décroissante, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq y_n$ et $|x_n - y_n| \to 0$. Ce type de suite est intéressant car **deux suites adjacentes convergent et ont la même limite**.

Par conséquent[2], $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq y_n$. Nous laissons la démonstration de la croissance de (x_n) et de la décroissance de (y_n) au lecteur. Pour montrer que nos suites sont adjacentes, il ne reste plus qu'à montrer que $|x_n - y_n| \to 0$. Pour cela, nous remarquons que :

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{(x_n - y_n)^2}{2(x_n + y_n)} \leq \frac{x_n - y_n}{2}$$

En itérant, nous avons que $0 \leq x_n - y_n \leq (\frac{1}{2})^n \frac{a-b}{2}$ donc par le théorème des gendarmes, on obtient que $x_n - y_n \to 0$. Par conséquent, les suites x_n et y_n sont adjacentes. Elles ont donc la même limite que nous allons noter l.

Pour trouver la limite l, nous allons avoir besoin de la notion d'invariant. Nous remarquons que le numérateur dans x_{n+1} est égal au dénominateur de y_{n+1} donc nous sommes tentés de considérés $x_{n+1}y_{n+1}$. On obtient que $x_{n+1}y_{n+1} = x_n y_n$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n y_n = ab$. C'est notre invariant. En passant à la limite, on obtient que $l^2 = ab$ donc $l = \sqrt{ab}$.

Bilan : Cet exercice permet de voir plusieurs choses très intéressantes telles que la notion de suite adjacente ou de moyenne harmonique. Par ailleurs, il faut noter que les suites définies par récurrences mettent souvent en jeu des invariants qu'il faut savoir repérer. Il est souvent intéressant de considérer des valeurs comme $x_{n+1} - x_n$ ou $\frac{x_{n+1}}{x_n}$.

Voici quelques exercices que le lecteur devrait chercher pour se familiariser avec la notion d'invariant.

Exercice 1. 2014 arbres forment un cercle. Il y a un merle sur chaque arbre. A chaque étape, deux merles quittent l'arbre où ils sont pour se poser sur un arbre voisin.
Est-il possible qu'à un moment tous les merles soient sur le même arbre ?

Exercice 2. Dans chacune des 16 cases-unité d'un carré 4 par 4, on a écrit un « + » sauf dans la deuxième case de la première ligne. On peut effectuer les trois opérations suivantes :

- Changer le signe de chacune des cases d'une ligne.
- Changer le signe de chacune des cases d'une colonne.
- Changer le signe de chacune des cases d'une diagonale (pas seulement les deux diagonales principales).
  Est-il possible d'obtenir une configuration pour laquelle chaque case contiendrait un « + » à l'aide d'un nombre fini de telles opérations ?

+	-	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+
+	+	+	+

Nous finirons ce cours par un dernier problème corrigé qui nous donnera un invariant très utile.

Exercice 3. Soient quatre entiers a, b, c, d. On suppose qu'ils ne sont pas tous égaux. En partant de (a, b, c, d) et en appliquant des itérations de la transformation qui remplace (a, b, c, d) par $(a-b, b-c, c-d, d-a)$, montrer qu'au moins l'un des quatre nombres deviendra arbitrairement grand.

Nous voyons clairement apparaître dans ce problème un processus qui se répète. On va donc essayer de chercher des invariants qui pourraient simplifier la résolution du problème. En fait, ce problème nous demande de définir une suite de points par récurrence. Notons : $P_n = (a_n, b_n, c_n, d_n)$. Comme les

[2] Nous venons de démontrer une inégalité classique en mathématique olympique : si a et b ¿ 0, alors $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \frac{a+b}{2}$. Le membre de gauche s'appelle **la moyenne harmonique**.

coordonnées sont définies par des soustractions, il peut sembler intéressant de tout sommer ! On obtient :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \qquad S_n &= a_n + b_n + c_n + d_n \\ &= (a_{n-1} - b_{n-1}) + (b_{n-1} - c_{n-1}) + (c_{n-1} - d_{n-1}) + (d_{n-1} - a_{n-1}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc à partir du rang 1, la somme des coordonnées est un invariant. Cet invariant nous dit que comme la somme est toujours nulle, si une coordonnée devient arbitrairement petite (tend vers $-\infty$) alors, une autre coordonnée va devenir arbitrairement grande. Il faut comprendre par là que $-\infty$ et $+\infty$ jouent le même rôle pour ce problème. Donc le problème revient à montrer que la suite de points (P_n) s'éloigne infiniment de l'origine $(0, 0, 0, 0)$. Nous allons donc considérer le carré de la distance du point P_n à l'origine $(0, 0, 0, 0)$[3] (l'intérêt d'élever au carré est d'enlever la racine).

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \qquad D_{n+1} &= a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 \\ &= (a_n - b_n)^2 + (b_n - -c_n)^2 + (c_n - d_n)^2 + (d_n - a_n)^2 \\ &= 2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - 2a_nb_n - 2b_nc_n - 2c_nd_n - 2d_na_n \\ &= 2D_n - 2a_nb_n - 2b_nc_n - 2c_nd_n - 2d_na_n \end{aligned}$$

Nous voyons ici que l'exercice serait résolu si on pouvait avoir $D_{n+1} \geq 2D_n$. On veut donc montrer que le reste est négatif. Pour cela, nous allons réutiliser le premier invariant. En effet, on a :

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \qquad 0 &= (a_n + b_n + c_n + d_n)^2 \\ &= (a_n + b_n)^2 + (c_n + d_n)^2 + 2a_nb_n + 2b_nc_n + 2c_nd_n + 2d_na_n \end{aligned}$$

Par conséquent , $-2a_nb_n - 2b_nc_n - 2c_nd_n - 2d_na_n \geq 0$ d'où :

$$D_{n+1} = 2D_n - 2a_nb_n - 2b_nc_n - 2c_nd_n - 2d_na_n \geq 2D_n$$

On itère cette relation par récurrence et on obtient que $D_n \geq 2^{n-1}D_0$. Donc D_n est arbitrairement grand, ce qui termine la preuve.

Bilan : Ce problème nous permet de voir un nouvel invariant très utile lorsque nous avons une suite de points. Il s'agit du carré de la distance à l'origine.

[3] Le lecteur connaît bien entendu la distance dans un espace de dimension 2 (c'est-à-dire avec deux coordonnées (x, y)). La distance entre un point (x, y) et un point (x', y') est $\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$. En fait, cette distance peut être généralisée pour des espaces de dimension n, c'est-à-dire des espaces avec des points de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$. La distance entre le point $(x_1, \ldots, x_n)$ et le point $(y_1, \ldots, y_n)$ est $\sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}$.

Vol. 1, No. 3, 2017, pp. 12–15

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

Mohammed Amine Bennouna

Introduction. Les équations fonctionnelles forment un thème très récurrent dans le monde des olympiades de mathématiques. Cela n'est pas étonnant : les problèmes d'équations fonctionnelles sont souvent très simplement formulés et leur résolution ne nécessite pas beaucoup de calcul mais simplement de petites astuces ingénieuses. C'est ce qu'on aime dans les mathématiques olympiques ! Dans ce cours, on voit quelques techniques basiques de résolution d'équations fonctionnelles.

Une équation fonctionnelle est une équation dont l'inconnue est une fonction sur laquelle sont imposées plusieurs conditions. Une solution de l'équation fonctionnelle est donc une fonction vérifiant ces conditions. L'équation de Cauchy, une des équations fonctionnelles les plus connues, en est un exemple typique :

Exemple 1 (Équation fonctionnelle de Cauchy). Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ vérifiant pour tous rationnels x et y :

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Avant de s'attaquer à l'équation fonctionnelle de Cauchy, nous allons commencer par aborder un exemple très simple.

Exemple 2. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous réels x et y :

$$f(xy) = xf(y)$$

Remarquons tout d'abord un élément important : **les ensembles de départ et d'arrivée**. Il faut toujours y faire attention. Dans l'exemple 1, les ensembles de départ et d'arrivée sont $\mathbb{Q}$; dans l'exemple 2, c'est $\mathbb{R}$. Le résultat peut considérablement varier selon les ensembles.

La condition sur la fonction prend très souvent la forme de celle des exemples 1 et 2 : une condition impliquant deux variables x et y. Pour résoudre l'équation, on remplace donc x et y par différentes valeurs pour trouver des conditions précises sur f.

Considérons f une solution. Une première approche de l'équation est de remplacer x et y par des nombres pour trouver des valeurs simples de la fonction : $f(0), f(1), f(-1), \ldots$. Dans l'exemple 1, si on remplace x et y par 0, l'équation devient :

$$f(0 \times 0) = 0 \times f(0) = 0$$

La solution de l'équation doit donc forcement vérifier $f(0) = 0$. On pourrait également remplacer x par 1 et y par 1. L'équation devient :

$$f(1) = f(1)$$

On ne peut rien en tirer d'utile ! Ce genre de tentatives n'est donc pas toujours fructueux. Par contre, en remplaçant y par 1 et en gardant x variable, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = xf(1)$$

Ce résultat nous donne presque une formule pour f. Il ne nous reste plus qu'à trouver $f(1)$. En fait, $f(1)$ peut prendre n'importe quelle valeur réelle ! On va vérifier que toutes les fonctions de la forme $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{R}$ sont solutions. Prenons $a \in \mathbb{R}$ et considérons la fonction définie par $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f(xy) = axy$ et $xf(y) = axy$ donc $f(xy) = xf(y)$. f vérifie les conditions de l'équation donc est solution. Ainsi les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{R}$, et $a = f(1)$.

On constate notamment dans l'exemple 2 que la solution d'une équation fonctionnelle n'est en général pas unique.

Le raisonnement qu'on a suivi dans la résolution de l'équation précédente est typique des équations fonctionnelles : on l'appelle le *raisonnement par analyse-synthèse*. Il consiste à diminuer le nombre de solutions possibles de l'équation en trouvant de plus en plus de conditions (comme $f(0) = 0$ ou encore $f(x) = f(1)x$ dans l'exemple 2), puis à vérifier que les fonctions restantes respectent l'équation. Autrement dit, on montre que si f est une solution, alors elle vérifie telle condition, puis on s'assure que toute fonction vérifiant cette condition est solution. Attention, il faut toujours vérifier que les fonctions qu'on trouve sont bien solutions, en les remplaçant dans l'équation. On dit qu'on *injecte* la solution dans l'équation.

Attaquons-nous désormais à un exemple légèrement différent du précédent :

Exemple 3. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{Q}$:

$$f(nx) = nf(x)$$

Considérons f une solution. On peut voir la condition comme $f(x+x+...+x) = f(x)+f(x)+...+f(x)$ avec n termes dans chaque somme. On peut remarquer qu'en remplaçant n par 0, l'équation devient $f(0) = 0$. On connait donc $f(0)$. Essayons la méthode adoptée dans l'exemple 2 et remplaçons x par 1 en gardant n variable. On obtient $f(n) = f(1)n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui donne f pour les entiers seulement : ce n'est pas suffisant.

Il faut être un peu plus astucieux cette fois-ci... Puisque $x \in \mathbb{Q}$ dans l'énoncé, on utilise la caractérisation suivante des nombres rationnels : tout nombre rationnel x peut s'écrire sous la forme $x = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. Avec cette écriture, l'équation devient :

$$f(n\frac{p}{q}) = nf(\frac{p}{q})$$

Il faut maintenant choisir judicieusement n. On connaît les valeurs de f sur les entiers, on est donc tenté de choisir $n = q$ pour transformer $n\frac{p}{q}$ en un entier. En prenant $n = q$ on a $f(p) = qf(\frac{p}{q})$, donc $f(1)p = qf(\frac{p}{q})$ puis $f(1)\frac{p}{q} = f(\frac{p}{q})$.

Finalement :

$$f(1)x = f(x)$$

On retrouve le même résultat que dans l'exemple 2. Ainsi, on vérifie à nouveau que toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ de la forme $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{Q}$ (il est important de noter que a est dans $\mathbb{Q}$ cette fois-ci) sont solutions. En effet, pour une telle fonction f, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Q}$:

$$f(nx) = anx$$

et :

$$nf(x) = nax = anx.$$

Avant de résoudre l'équation de Cauchy, deux remarques de méthodologie importantes :

- Il est judicieux de chercher des solutions évidentes à l'équation avant d'essayer de la résoudre. Par exemple, on peut facilement remarquer que la fonction définie par $f(x) = x$ pour $x \in \mathbb{Q}$ est solution de l'équation de l'exemple 3. On peut également le vérifier avec $f(x) = 2x$ pour $x \in \mathbb{Q}$. Cela nous donne une idée des solutions qu'on est amené à trouver.
- On peut aussi intuiter l'ensemble des solutions en vérifiant les *invariances* de l'équation. Par exemple, on remarque que si f est une solution de l'équation de l'exemple 2, alors $g = \alpha f$ est aussi solution quel que soit $\alpha \in \mathbb{R}$. En effet, on aura toujours $g(xy) = \alpha f(xy) = \alpha x f(y) = x(\alpha f(y)) = xg(y)$. Avec cette donnée, on peut imposer des conditions sur une solution donnée f. Par exemple, on peut imposer $f(1) = 1$ car on peut choisir $\alpha = \frac{1}{f(1)}$ (si $f(1) \neq 0$) et étudier la solution $g = \alpha f$ plutôt que f. Une fois qu'on a déterminé g, on peut étudier toutes les fonctions de la forme γg, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Exercice 1 (Équation fonctionnelle de Cauchy). Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ vérifiant pour tous réels x et y :

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Solution : On commence par remarquer que toutes les fonctions de la forme $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{Q}$ (encore !) sont solutions. Démontrons que ce sont les seules.
En remplaçant x et y par 0, il vient que $f(0) = 0$. On remarque qu'on n'arrive pas à déterminer $f(1)$, ce qui est normal car pour les solutions de la forme $f(x) = ax$, la valeur de $f(1) = a$ dépend de la solution. On pose donc $a = f(1) \in \mathbb{Q}$.
On constate ensuite que $f(1+1) = f(1) + f(1) = 2a$, $f(2+1) = f(2) + f(1) = 2a + a = 3a$, etc. En continuant ainsi, on a $f(n) = an$ pour tout n. On connaît donc f sur l'ensemble des entiers naturels.
On peut recommencer en remplaçant 1 par un $x \in \mathbb{Q}$ quelconque : $f(x+x) = 2f(x)$, $f(2x+x) = f(2x) + f(x) = 3f(x)$, etc. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(nx) = nf(x)$. On retrouve l'exemple 3 ! On connaît donc les solutions de l'équation : ce sont les fonctions de la forme $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{Q}$. C'est bien le résultat attendu. □

Exercice 2 (Équation fonctionnelle de Jensen). Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ vérifiant pour tous réels x et y :

$$f(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Solution : On commence par chercher des solutions évidentes. Par exemple, on vérifie facilement que $f(x) = x$, $f(x) = 2x$, $f(x) = x + 1$ sont solutions. Plus généralement, on peut vérifier que toute fonction de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$ est solution. Montrons que c'est la seule forme possible.
Soit f solution. On remarque que αf et $f + \beta$ sont aussi solutions si $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$. Cela nous permet notamment de choisir $f(0) = 0$ (avec $\beta = -f(0)$).
Pour $y = 0$ et x variable, on a $f(\frac{x}{2}) = \frac{f(x)}{2}$. Donc pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$, $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(x+y)}{2}$ (en remplaçant x dans l'égalité précédente par $x + y$). Or, l'équation nous donne $f(\frac{x+y}{2}) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$ donc $\frac{f(x+y)}{2} = \frac{f(x)+f(y)}{2}$, ce qui implique que $f(x+y) = f(x) + f(y)$. On retrouve l'équation de Cauchy ! On sait que ses solutions sont les fonctions de la forme $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{Q}$. Donc les solutions de l'équation de Jensen sont les fonctions de la forme $f(x) = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{Q}$.

Remarque Les équations de Cauchy et de Jensen peuvent être généralisées pour des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Avec la condition que les fonctions soient *continues* (une notion abordée en dernière année lycée), les solutions sont les mêmes, à ceci près que les coefficients a et b peuvent être alors choisis dans $\mathbb{R}$ tout entier. □

Exercice 3. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(xf(y)) = xy$$

Solution : On remarque que la fonction $f(x) = x$ est solution, mais on ne trouve pas d'autre solution évidente. Pour ce qui est des invariances, on constate que si f est solution, alors $-f$ aussi :

$$-f(x \times (-f)(y)) = -f((-x) \times f(y)) = -(-x)y = xy$$

Notamment, $f(x) = -x$ est solution. Vérifions que les deux solutions trouvées sont les seules.

$x = 0$ nous donne que $f(0) = 0$.
Avec $x = 1$, on a $f(f(y)) = y$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. On remarque alors que si a, b sont deux réels tels que $f(a) = f(b)$, alors $f(f(a)) = f(f(b))$ donc $a = b$. f ne peut donc pas prendre la même valeur sur deux nombres différents ! Une fonction vérifiant cette propriété est dite *injective*.
En remplaçant y par 1, on obtient $f(xf(1)) = x$. On a vu que $f(f(x)) = x$, donc $f(xf(1)) = f(f(x))$. La fonction étant injective, $xf(1) = f(x)$. Il nous reste à voir quelles sont les fonctions de cette forme solutions de l'équation. En remplaçant f par sa valeur dans l'équation, on obtient que $f(1)^2 xy = xy$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. En prenant $x, y = 1$, on a $f(1)^2 = 1$ donc $f(1) = 1$ ou $f(1) = -1$. Ainsi, $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$ comme attendu. $\square$

Vol. 1, No. 3, 2017, pp. 16–19

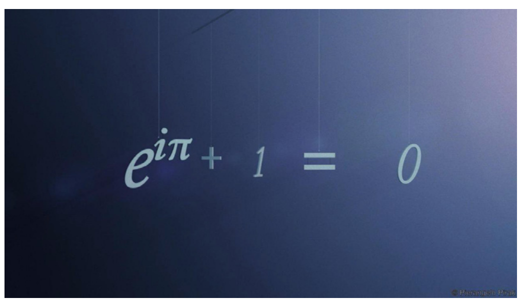
LA BEAUTÉ DES MATHÉMATIQUES

L'identité d'Euler

Mouad Moutaoukil

La beauté « physique » des mathématiques :

Ayant discuté une forme de beauté mathématique plus ou moins abstraite au cours des deux numéros précédents, nous choisissons de nous intéresser cette fois-ci au côté « physique » et plus concret de cette beauté. Le meilleur exemple de cette esthétique est sans conteste la fameuse identité d'EULER :



Identité d'EULER[1]

Cette formule a été mentionnée par EULER (Leonhard 1707–1783) dans son ouvrage *Introductio in analysin infinitorum* publié en 1748. C'est un cas particulier de la formule d'EULER ($x = \pi$) :

$$e^{\mathrm{i}x} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$$

Pourquoi cette identité est-elle belle ?

"C'est la combinaison improbable de ces cinq constantes qui rend belle cette équation"- Villani (Cédric 1973-)

Ce qu'il y a de remarquable dans cette égalité est en effet très simple, c'est la coprésence de cinq constantes mathématiques fondamentales :

– 0 et 1 sont les éléments neutres respectifs de l'addition et de la multiplication. Ils sont à l'origine de la construction de l'algèbre.

[1] www.bbc.com/earth/story/20160120-the-most-beautiful-equation-is-eulers-identity

- π est un nombre irrationnel transcendant désignant le rapport de la circonférence d'un cercle à son diamètre dans un plan euclidien. Rappelons qu'un nombre est dit transcendant s'il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers. π constitue l'un des fondements de la géométrie.
- e est la base du logarithme népérien et se caractérise par la relation $\ln(e) = 1$. Tout comme π, il s'agit d'un nombre transcendant, utilisé principalement en analyse.
- Quant à i, qui vérifie $\mathrm{i}^2 = -1$, c'est l'unité imaginaire servant de base à la construction des nombres complexes, très utilisé en analyse et en géométrie.

On remarque donc que l'identité doit son caractère exceptionnel au lien unificateur qu'elle représente, puisque les cinq constantes qui la construisent proviennent de domaines mathématiques très différents. La relation qu'établit EULER entre ces cinq nombres utilise par ailleurs trois opérations fondamentales : *l'addition*, *la multiplication*, bases de l'algèbre, et *l'exponentiation*, qu'on retrouve en analyse, ce qui confirme encore une fois le caractère unificateur de l'identité.

Quelques démonstrations

On a vu que puisque $\cos\pi = -1$ et $\sin\pi = 0$, cette identité est le cas particulier $x = \pi$ de la formule d'Euler en analyse complexe selon laquelle pour tout nombre réel x, $e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$. Cette dernière peut être démontrée en utilisant les séries de Taylor, en développant les trois fonctions exp, cos et sin.

C'est aussi le cas particulier $n = 2$ de la nullité de la somme des racines n-ièmes de l'unité. En effet, on retrouve l'identité en remplaçant n par 2 dans la formule :

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{\mathrm{i}2k\pi}{n}} = 0$$

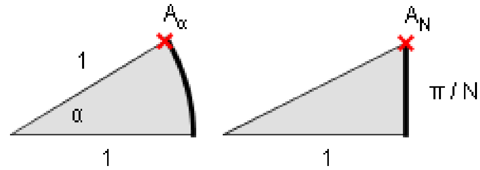
On peut aussi donner une justification de la formule en utilisant la géométrie : on juxtapose N triangles rectangles pour obtenir le point d'affixe $\left(1 + \frac{\mathrm{i}\pi}{N}\right)^N$, puisque les multiplications complexes se traduisent par des rotations. Rotations qui, après N itérations, nous ramènent à la partie négative de l'axe réel. De plus, curiosité de l'infini mathématique, quoique strictement supérieur à 1, $|(1 + \frac{i\pi}{N})^N|$ tend vers 1 comme on le voit sur les schémas ci-dessous.

Puis on utilise le fait que :

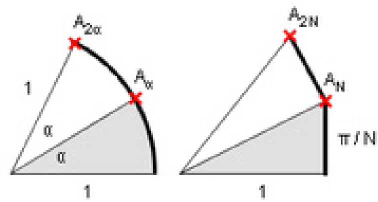
$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{e}^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

On conclut donc qu'on tend à la fois vers $e^{\mathrm{i}\pi}$ et vers -1 quand N tend vers l'infini.

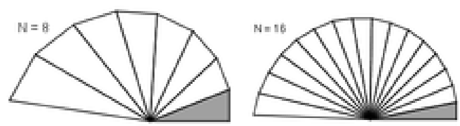
Les schémas ci-dessous (accessibles sur Wikipédia) présentent une petite explication de la méthode suivie.



Le point A_N de coordonnée $\left(1 + \frac{\mathrm{i}\pi}{N}\right)$

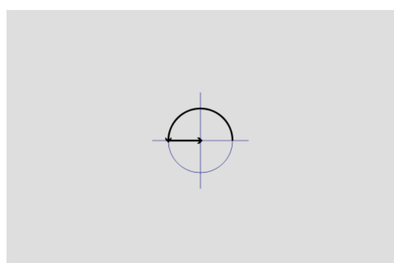


Le point A_{2N} de coordonnée $\left(1+\frac{\mathrm{i}\pi}{N}\right)^2$ obtenu en juxtaposant deux triangles rectangles



Plus N est grand, plus $\left(1+\frac{\mathrm{i}\pi}{N}\right)^N$ s'approche mutuellement de $e^{\mathrm{i}\pi}$ et de -1

Une façon de voir ceci est la suivante : la formule d'Euler décrit deux manières équivalentes de se déplacer en cercle. La figure suivante, aussi accessible sur Wikipédia, montre en effet que le déplacement de $e^{\mathrm{i}\pi}+1$ nous fait revenir en 0.



Conclusion

La beauté des mathématiques se manifeste clairement dans les découvertes de liaisons entre des domaines mathématiques très différents. Le plus grand pas fait dans ce sens est sans doute celui de BOURBAKI (1935-), nom d'un mathématicien imaginaire sous lequel un groupe de chercheurs francophones a publié des textes visant l'unification et la réorganisation des mathématiques. Son œuvre pourrait être comparée à une identité d'Euler mettant en scène tous les domaines des mathématiques, aussi indépendants et différents soient-ils. Euler a donc introduit, en 1748, un puissant lien unificateur, qui motiverait peut être les mathématiciens contemporains pour suivre l'exemple de Bourbaki et essayer d'unifier encore plus les mathématiques afin d'en faire une science plus homogène et harmonieuse.

L'expérience dont nous avons parlé au deuxième numéro, prouvant que l'observation d'une belle formule mathématique active, chez les mathématiciens, les mêmes zones du cerveau que la contemplation d'une oeuvre d'art activerait chez un artiste, couronne également l'identité d'Euler. En effet, le cortex préfrontal des mathématiciens, siège des fonctions cognitives supérieures -comme le raisonnement-, a été exceptionnellement excité à la vue de la formule, montrant sa beauté.

Soit n un entier ≥ 2. Montrer que si k^2+k+n est premier pour tout k vérifiant $0 \leq k \leq \sqrt{n/3}$, alors k^2+k+n est premier pour tout k vérifiant $0 \leq k \leq n-2$.

P6 IMO 1987

Solution :

Préliminaire : Si a et b sont deux entiers positifs tels que a soit premier avec $b+1, b+2, \ldots, 2b$ et tels que $a < (2b+1)^2$, alors a est premier.

Démonstration : D'abord, si a est premier avec $b+1, b+2, \ldots, 2b$, alors a est premier avec tout nombre inférieur à $2b$. En effet, si $c \leq 2b$ on peut trouver un i tel que $2^i c \geq b+1$. En posant $\alpha = \min\{i \in \mathbb{N},\ 2^i c \geq b+1\}$, on a $2^\alpha c \leq 2b$, car sinon $2^{\alpha-1} c > b$ ce qui veut dire que $\alpha - 1 \in A$, ce qui contredit la minimalité de α.
Donc, $2^\alpha c$ est premier avec a, d'où c est premier avec a.
Si a vérifie de plus : $a < (2b+1)^2$, alors a est premier. En effet, si ce n'était pas le cas, il admettrait un diviseur non trivial plus petit que $\sqrt{a}$.

Posons maintenant $r = \lfloor \sqrt{n/3} \rfloor$. On suppose que $k^2+k+n = n+k(k+1)$ est premier pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$ et on montre alors que $N = n+(r+s)(r+s+1)$ est premier pour $s = 0, 1, \ldots, n-r-2$. En utilisant le préliminaire (b=r+s), il suffit de montrer que $N < (2s+2r+1)^2$ et que N est premier avec $r+s+1, r+s+2, \ldots, 2r+2s$.

- On a : $(2s+2r+1)^2 > 4r^2+2rs+s^2+7r+s+2 = 3r^2+6r+2+(r+s)(r+s+1) \geq n+(r+s)(r+s+1) = N$.
- On montre que N est premier avec $r+s+1, r+s+2, \ldots, 2r+2s$ On suppose par l'absurde que N a un diviseur non trivial qui divise aussi $2r-i$ avec $i = -2s, \ldots, r-s-1$. Ce facteur divise alors $N-(i+2s+1)(2r-i) = n+(r-i-s-1)(r-i-s) = n+\beta(\beta+1)$ avec $\beta \in \{0, 1, \ldots, r\}$, ce qui est absurde puisque ce dernier est premier. D'où le résultat.

$\square$

Vol. 1, No. 3, 2017, pp. 20–20

EXERCICES

Les lecteurs sont conviés à nous envoyer leurs résultats ou exercices dans la langue de leur choix à l'adresse redac.mathetmaroc@gmail.com.
Toute proposition doit nous parvenir au plus tard le **17 août 2017**.

Combinatoire

Exercice 13. Dans un plan sont placés 66 points distincts. On trace toutes les droites déterminées par deux de ces points et on en compte 2016 distinctes. Montrer que parmi ces 66 points, 4 au moins sont alignés.

Exercice 14. On part de l'ensemble $\{3, 4, 12\}$. A chaque étape, on choisit deux nombres a, b de notre ensemble et on les remplace par $0,6a - 0,8b$ et $0,8a + 0,6b$.

1. Peut-on obtenir en un nombre fini d'étapes l'ensemble $\{4, 6, 12\}$?
2. Peut-on obtenir en un nombre fini d'étapes un ensemble de la forme $\{x, y, z\}$ où $|x - 4|$, $|y - 6|$ et $|z - 12|$ sont tous strictement inférieurs à $\frac{1}{\sqrt{3}}$?

Équations fonctionnelles

Exercice 15. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(f(x + y)) = f(x + y) + f(x)f(y) - xy$$

Exercice 16. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$,

$$f(x + y) + f(x - y) = 2(f(x) + f(y))$$

Divers

Exercice 17. Un nombre constitué de 600 six et d'un nombre fini, éventuellement nul, de zéros à la fin peut-il être un carré parfait ?

Exercice 18. Montrer qu'il n'existe aucun polynôme P à coefficients entiers tel que $P(7) = 11$ et $P(11) = 13$.

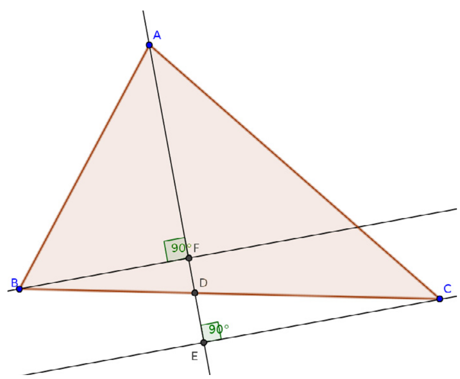
Vol. 1, No. 3, 2017, pp. 21–25

CORRECTIONS DU NUMÉRO PRÉCÉDENT

Géométrie

Exercice 7. Soit ABC un triangle. Soit D l'intersection de la bissectrice de $B\hat{A}C$ et $[BC]$. Montrer que $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$.

Solution :



Soient E et F les projections orthogonales de C et B sur (AD). On a

$$\frac{CE}{CD} = \sin\widehat{CDE} = \sin\widehat{FDB} = \frac{BF}{BD}.$$

D'autre part, (AD) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$, donc $\widehat{BAF} = \widehat{BAD} = \widehat{DAC} = \widehat{EAC}$ donc

$$\frac{BF}{AB} = \sin\widehat{BAF} = \sin\widehat{EAC} = \frac{CE}{AC}.$$

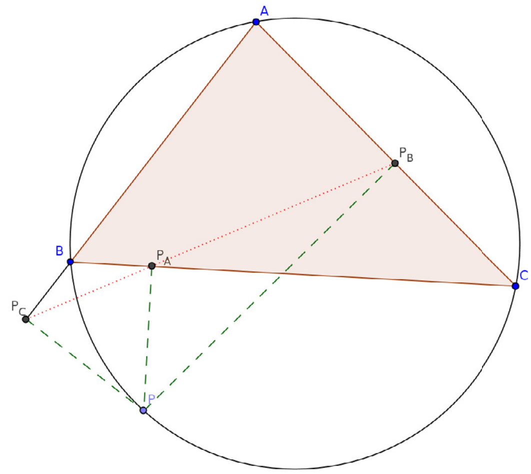
Finalement :

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BF}{CE} = \frac{AB}{AC}.$$

□

Exercice 8. Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. Soit P un point du plan. On note P_A, P_B et P_C ses projetés orthogonaux sur (BC), (CA) et (AB).
Montrer que P_A, P_B et P_C sont alignés si et seulement si $P \in \Gamma$.

Solution :



Supposons d'abord que $P \in \Gamma$. Pour montrer que les points P_A, P_B et P_C sont alignés, il suffit de montrer que $\widehat{BP_AP_C} = \widehat{CP_AP_B}$. D'abord, les quadrilatères BP_APP_C, PP_AP_BC et P_CAP_BP sont circonscriptibles puisque $\widehat{PP_CB} = \widehat{BP_AP} = \widehat{CP_BP} = \frac{\pi}{2}$. On a donc

$$\begin{aligned}\widehat{BP_AP_C} = \widehat{BPP_C} = \frac{\pi}{2} - \widehat{P_CBP} &= \frac{\pi}{2} - \widehat{ACP} \\ &= \frac{\pi}{2} - \widehat{P_BCP} \\ &= \widehat{P_BPC} \\ &= \widehat{P_BP_AC}.\end{aligned}$$

Réciproquement, si les points P_A, P_B et P_C sont alignés, $P \in \Gamma$ équivaut à $\widehat{BPC} + \widehat{BAC} = \pi$. Montrons cette dernière assertion :

$$\begin{aligned}\widehat{BPC} = \widehat{BPP_A} + \widehat{P_APC} = \frac{\pi}{2} - \widehat{P_ABP} + \frac{\pi}{2} - \widehat{P_ACP} &\\ = \pi - \widehat{P_AP_CP} - \widehat{P_AP_BP} &\\ = \pi - \widehat{P_BP_CP} - \widehat{P_CP_BP} &\\ = \widehat{P_CPP_B} &\\ = \pi - \widehat{BAC}. &\end{aligned}$$

□

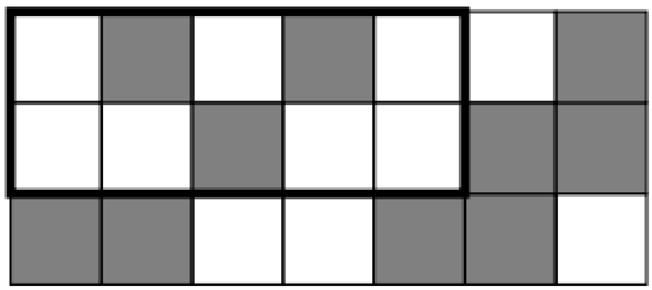
Combinatoire

Exercice 9. Soit n un entier. Soit A un sous-ensemble de $\{1, \dots, 2n\}$ contenant $n+1$ éléments. Montrer qu'il existe $(p, q) \in A^2$ tel que $p \neq q$ et p divise q.

Solution : Nous présentons ici deux solutions. La première utilise le principe des tiroirs, la deuxième est un raisonnement par récurrence.
Solution 1 :
Tout d'abord, il faut noter que tout entier naturel s'écrit sous la forme $2^d(2k+1)$ avec $d \geq 0$ et $k \geq 0$. Il est vivement conseillé au lecteur de démontrer ce petit lemme très utile !
Lorsqu'un nombre entier est compris entre 1 et $2n$, le coefficient $2k+1$ de l'écriture précédente peut prendre n valeurs différentes $0 \leq k \leq n-1$. Comme A contient $n+1$ entiers de $\{1, \dots 2n\}$, on peut trouver, d'après

le principe des tiroirs p et q tel que $p < q$ et $p = 2^d(2k+1)$ et $q = 2^{d'}(2k+1)$. Or comme $p < q$, on a que $d < d'$ donc 2^d divise $2^{d'}$. Donc p divise q.
Solution 2 :
Pour $n = 1$, le résultat est immédiat car A contient 1. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$ et montrons-la au rang n. Supposons par l'absurde qu'il existe un sous-ensemble A de $\{1, \ldots, 2n\}$ contenant $n+1$ éléments tels que pour tous éléments $p \neq q$ de A, p ne divise pas q.
Par hypothèse de récurrence, il y a au plus $n-1$ éléments de A qui sont dans $\{1, \ldots, 2n-2\}$. Donc $2n-1 \in A$ et $2n \in A$. Or si $2n$ est dans A, n n'est pas dans A et aucun élément de A ne divise n.
Posons $B = A \setminus \{2n-1, 2n\} \cup \{n\}$. B contient n éléments de $\{1, \ldots, 2n-2\}$ mais il n'existe pas $p \neq q$ tels que p divise q. Ce qui contredit l'hypothèse de récurrence ! □

Exercice 10. Soit un rectangle de côtés 3 et 7, quadrillé en 21 carrés de côté 1. On colorie chaque carré en noir ou blanc.
Montrer qu'on peut trouver 4 petits carrés distincts de la même couleur, formant les coins d'un rectangle :



Solution : Le nombre total de colonnes différentes qu'on peut former avec 3 carrés de couleur blanche ou noire est $2^3 = 8$. Ainsi, le nombre de colonnes qui ne contiennent pas 3 carrés de la même couleur est 6, et parmi ces 6, 3 possèdent exactement 2 carrés blancs, et les 3 autres 2 carrés noirs. Par conséquent, deux cas peuvent se produire :

- Soit les 7 colonnes sont deux à deux distinctes. Il existe alors au moins une colonne dont tous les carrés sont de même couleur. On peut supposer qu'elle est blanche (raisonnement similaire si la colonne est noire). Il existe aussi nécessairement au moins 5 colonnes qui ne sont pas d'une seule couleur et deux à deux distinctes, donc au moins une de ces colonnes a 2 carrés blancs. Ces deux carrés blancs, et les carrés de même hauteur sur la colonne blanche forment un rectangle répondant au problème.
- Soit les 7 colonnes ne sont pas 2 à 2 distinctes. Alors on choisit deux colonnes identiques, ce qui nous donne un rectangle.

□

Divers

Exercice 11. Un biologiste dispose de 100 bouteilles d'eau, dont une empoisonnée. Il veut déterminer laquelle est empoisonnée en utilisant des rats de laboratoire. Le scientifique peut faire goûter à chaque rat le nombre de bouteilles qu'il veut. À la fin de l'expérience, les rats ayant bu de l'eau empoisonnée meurent.
Quel est le nombre minimal de rats dont le biologiste a besoin pour déterminer quelle bouteille est empoisonnée ?

Solution : On est confronté ici à un problème de recherche. Il nous faut trouver la bouteille empoisonnée de façon optimale. Une des méthodes de recherche les plus pratiques est la recherche par dichotomie : on commence par vérifier si la bouteille recherchée est dans les 50 premières bouteilles. Si c'est la cas, on continue la recherche dans les 50 premières et on élimine les 50 restantes, sinon on continue la recherche dans les autres 50 bouteilles. On continue ainsi, on divisant les 50 bouteilles restantes en deux, et en vérifiant si la bouteille empoisonnée est dans la première moitié ou dans la deuxième.
Pour ce faire, on fait boire au premier rat les 50 premières bouteilles. Ensuite, on divise les bouteilles en 4 parties de 25 et on fait boire au deuxième rat la première et la troisième partie, etc. La figure 1 illustre le processus.

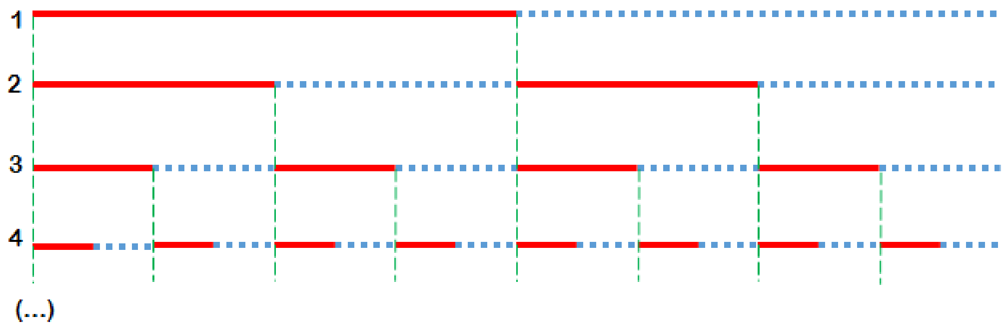


FIGURE 1. Le k-ième rat boit les bouteilles coloriés en rouge de la k-ième ligne.

Ainsi, chaque rat nous indique dans quel segment continuer la recherche. Si le premier rat meurt par exemple, il faut continuer la recherche dans la première moitié. Ensuite, si le deuxième rat meurt, il faut continuer la recherche dans la première moitié restante. Si le troisième rat ne meurt pas, il faut continuer la recherche dans la seconde moitié des 25 bouteilles restantes, etc. La figure 2 montre cette situation.

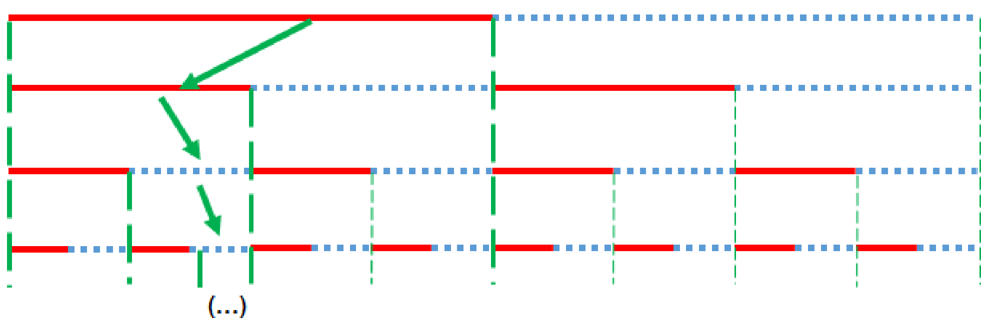


FIGURE 2. La mort du k-ième rat nous indique dans quelle partie nous devons chercher la bouteille.

Étant donné que $2^7 = 128 > 100$ et $2^6 = 64 < 100$, il nous faudra donc seulement 7 rats pour trouver la bouteille empoisonnée par cette méthode.
La minimalité de ce nombre provient essentiellement du fait que le problème se résume en la recherche d'un nombre entre 1 et 100 (numéro de la bouteille par exemple) et que chaque rat nous donne une information binaire (mort ou survie). Il faut donc au moins 7 bits pour coder tous les nombres de 1 à 100. Une rédaction plus rigoureuse de la preuve de minimalité est un peu plus technique. □

Exercice 12. Soient $a, b, c > 0$. Montrer que :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Cette inégalité, très connue, s'appelle l'inégalité de NESBITT.

Solution : Remarquons tout d'abord que

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a+(b+c)-(b+c)}{b+c} = \frac{a+b+c}{b+c} - 1.$$

En échangeant les rôles de a, b et c puis en sommant, on obtient que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) - 3.$$

Pour montrer l'inégalité, il suffit donc que montrer que

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3 \geq \frac{3}{2},$$

ce qui est équivalent à

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geq \frac{9}{2}$$

que l'on peut réécrire en termes de $a+b$, $b+c$ et $c+a$ sous la forme

$$((b+c)+(c+a)+(a+b))\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geq 9.$$

Utilisons donc l'inégalité arithmético-géométrique (vue dans le premier numéro) et appliquons-la à $b+c$, $c+a$ et $a+b$. On obtient

$$((b+c)+(c+a)+(a+b)) \geq 3\sqrt[3]{(b+c)(c+a)(a+b)}.$$

En l'appliquant aussi à $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$ et $\frac{1}{a+b}$, on a aussi

$$\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{(b+c)(c+a)(a+b)}}.$$

Le produit des deux dernières inégalités donne le résultat final. $\square$

L'inégalité de Nesbitt que nous venons de démontrer peut être obtenue *via* plusieurs inégalités de base : l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'inégalité du réordonnement, etc. Nous rencontrerons toutes ces inégalités ultérieurement.