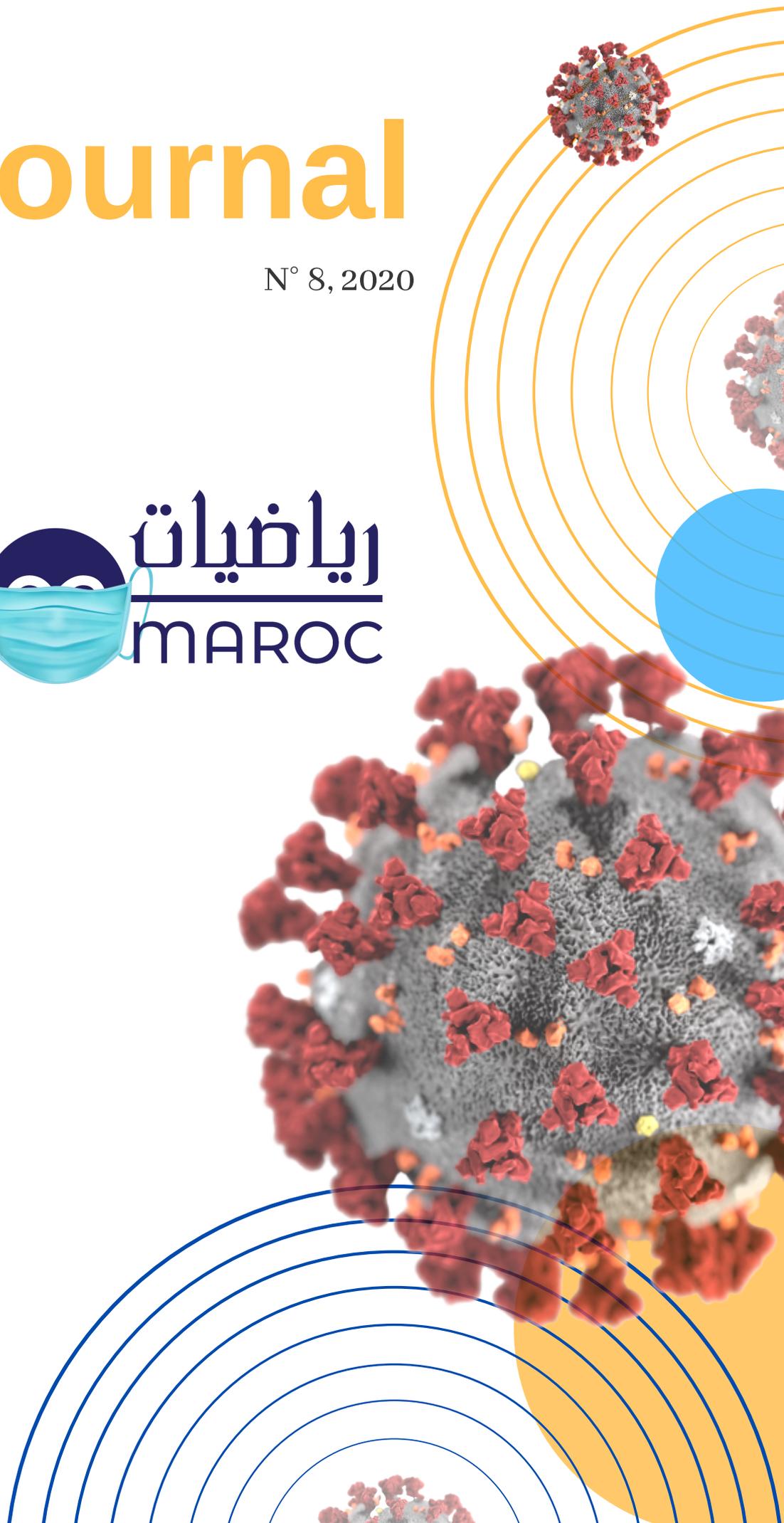


Le Journal

N° 8, 2020

رياضيات المغرب
MATH MAROC



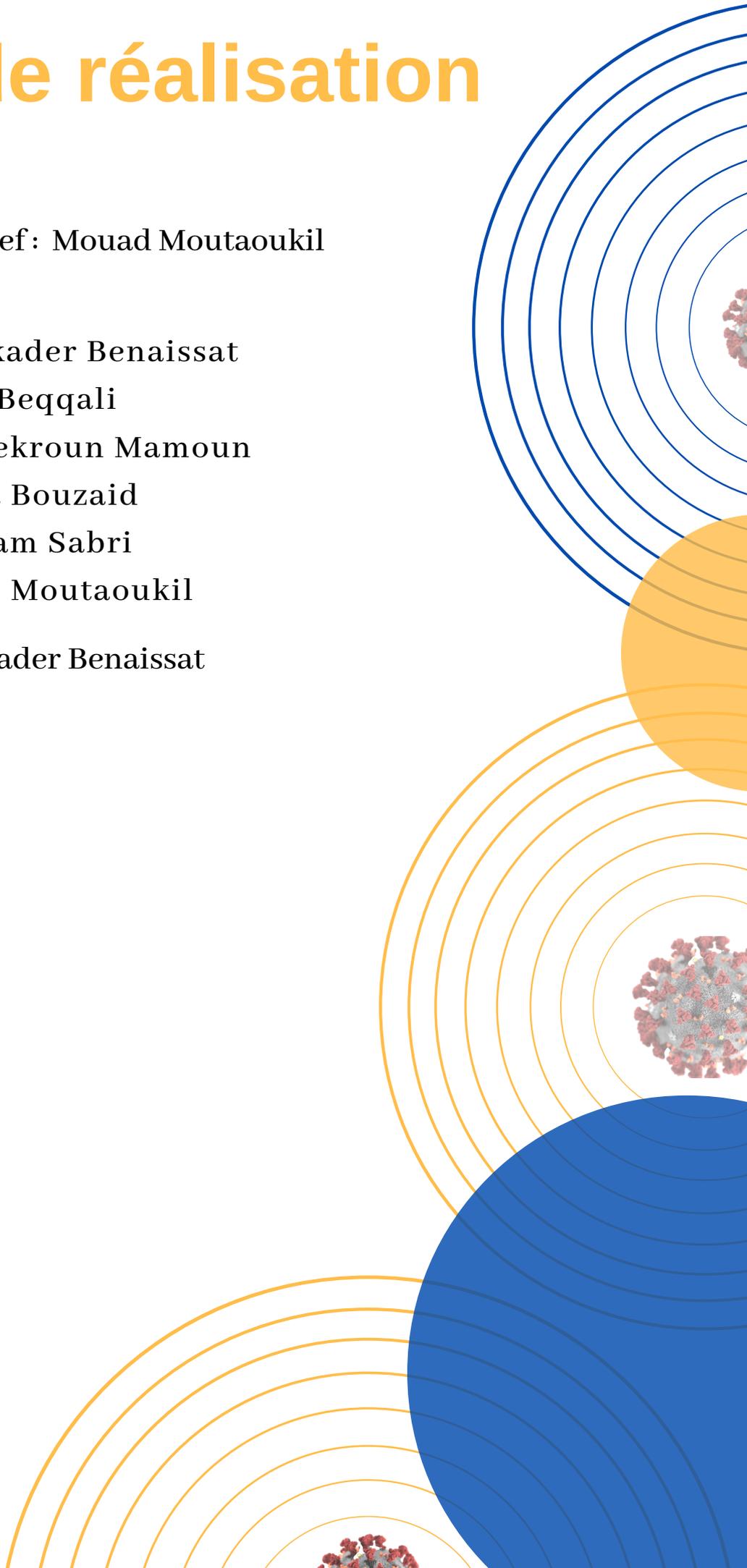
Comité de réalisation

Rédacteur en chef : Mouad Moutaoukil

Rédacteurs :

- Abdelkader Benaissat
- Anass Beqqali
- Benchekroun Mamoun
- Hamza Bouzaid
- Houssam Sabri
- Mouad Moutaoukil

Design : Abdelkader Benaissat



Empêcher la propagation du COVID-19 en 7 ETAPES

- 01 Lavez-vous les mains fréquemment
- 02 Évitez de toucher vos yeux, votre nez et votre bouche
- 03 Couvrez la bouche et le nez avec le pli du coude ou avec un mouchoir en cas de toux ou d'éternuement
- 04 Éviter les contacts proches
- 05 Restez à la maison si vous ne vous sentez pas bien
- 06 Si vous avez de la fièvre, de la toux et des difficultés à respirer, consultez un médecin tôt - mais appelez d'abord
- 07 Obtenez des informations de sources fiables

SOURCE: OMS

Et n'oubliez pas que vous pouvez gérer le stress du COVID-19 en faisant des mathématiques !



ÉDITORIAL

Le huitième numéro du Journal vient dans un contexte spécial : la pandémie persiste, les IMO 2020 se sont déroulés à distance, ce qui constitue une première mondiale, les activités reprennent timidement et la vie reprend progressivement son cours. A l'instar du reste du monde, les membres de Math&maroc se préparent à reprendre leurs activités et offrir aux jeunes intéressés par les mathématiques une panoplie de projets afin de les accompagner et les encourager dans leur passion.

Si la pandémie du Covid-19 a appris quelque chose au monde, c'est que le passage au virtuel est imminent. C'est dans cette vision que l'association a décidé de renforcer sa présence sur Internet et sur les réseaux sociaux. Nous sommes désormais présents sur Facebook, Youtube, LinkedIn et... Instagram !

De plus, notre Site Web est toujours là, regroupant les publications de l'association, ses actualités et ses passages médiatiques. Pour ce numéro, l'équipe de rédaction du Journal vous a concocté un contenu diversifié à travers plusieurs articles passionnants : la rubrique Actualités vous exposera les actualités de l'association et des mathématiques, la rubrique Beauté des Maths de ce numéro parle de psychologie et mathématiques, nos rédacteurs vous exhiberont ensuite certaines applications de la topologie en physique avant de passer à la rubrique Mathématiciens d'Hier et d'aujourd'hui avec deux portraits fascinants qu'on vous laisse découvrir !

Sommaire

Actualités

Quoi de neuf à Math&Maroc ?	2

Actualités des mathématiques	
- <i>Anass Beqqali</i> -----	5

Autour des mathématiques

Beauté des mathématiques : La psychologie des mathématiques ou les maths de la psychologie	
- <i>Mouad Moutaoukil</i> -----	10
Utilité des mathématiques : Physique & Topologie	
- <i>Houssam Sabri</i> -----	14

Mathématiciens d'hier et d'aujourd'hui

Le coin des anciens : Benchekroun Mamoun	
- <i>Benchekroun Mamoun</i> -----	21
Portrait d'un mathématicien : John Horton Conway	
- <i>Mouad Moutaoukil</i> -----	27

Défis olympiques

Nouveaux défis	
-----	31
Corrigés du numéro précédent	
-----	34



ACTUALITÉS

www.mathemaroc.com

Numéro 8, 2020

QUOI DE NEUF À MATH&MAROC ?

Bilan de projet : Tutorat Math&Maroc Covid-19

Au cours de cette année, la pandémie COVID 19 a porté préjudice à plusieurs secteurs de la vie quotidienne, et surtout le secteur de l'éducation. En effet, le gouvernement a imposé le confinement pendant des mois ce qui a transformé le mode de l'éducation au Maroc d'une éducation présentielle normale à une éducation en mode distanciel. A vrai dire, ce type abordé a créé une multitude de changements pour les élèves, et surtout les élèves qui ont passé l'examen du baccalauréat dans sa session 2020. Dans cette perspective, l'association Math&Maroc a lancé le projet Tutorat, une initiative qui vise à organiser des séances de tutorat en faveur des élèves du baccalauréat dans le but de les aider pour terminer et maîtriser le programme scolaire, et afin de leur permettre une bonne préparation pour l'examen national.



Après plusieurs réunions des membres, l'association est passée à la phase d'application, il nous fallait un nombre de tuteurs volontaires qui se chargeront d'encadrer les élèves pendant cette période afin de mener ce projet à terme. A cet égard, deux formulaires ont été publiés sur la plateforme Google Forms pour les élèves qui souhaitent bénéficier de ce projet et pour les tuteurs qui souhaitent donner leur temps et effort aux élèves. Ainsi, après l'acquisition de ces données, et pour assurer une bonne compréhension aux élèves et une bonne atmosphère d'étude, l'association a formé des petits groupes de 5 personnes dont chacun sera attribué à un tuteur. En réalité, environ 3000 demandes d'élèves et 220 offres, après un traitement de ces demandes et une augmentation au niveau des nombres des tuteurs, nous avons pu aider 1800 élèves grâce à l'encadrement de 400 tuteurs volontaires.

Liste des élèves								
Nom	Lycée	Ville	Filière	Matières	Demandes	Whatsapp	Facebook	Signaler
Aya Mouiz	Manarat Al Firdaous	Khémisset	SCIENCES MATHÉMATIQUES A	SVT			Aya Mouiz	
Aya Essadaqa	BEN TAHIR	Errachidia	SCIENCES MATHÉMATIQUES A	MATHÉMATIQUES	Arithmétique, les intégrales		Aya Ess	
Elmoutaouakil Ali	DERFOUFI	Agadir	SCIENCES MATHÉMATIQUES A	MATHÉMATIQUES	Les arithmétiques en Z		Ali el moutaouakil	
Alae Wahib	Mohammed 6	Oujda	SCIENCES MATHÉMATIQUES A	MATHÉMATIQUES	L'arithmétique et les structures algébriques		Alae Wahib	

De surcroît, l'association a mis en lieu une plateforme pratique pour permettre aux tuteurs d'avoir un accès aux informations de leurs élèves en toute flexibilité, afin de faciliter la communication et l'élaboration des comptes rendus des séances. Cette plateforme a joué un rôle primordial dans ce projet, elle a permis aussi de signaler les élèves inactifs et les remplacer par des nouveaux élèves pour maximiser le nombre des bénéficiaires.

Par ailleurs, après l'affectation des groupes, il fallait contacter les tuteurs pour la confirmation de leur présence, et pour leur donner le plan de travail et les instructions qu'il doivent suivre pour un déroulement idéal du projet. De ce fait, les membres de l'association ont entamé leurs réunions et leurs travaux : le contact des tuteurs, la création et partage des groupes. Ensuite, ils ont procédé à une automatisation de ces procédures par le biais du codage de la plateforme qui va automatiquement traiter les données et affecter les élèves suivant un ordre chronologique bien précis et selon la matière souhaitée.

A vrai dire, l'association a rencontré quelques problèmes au cours de l'avancement de ce projet. D'une part, les formulaires publiés avaient laissé le choix aux élèves et aux tuteurs de s'exprimer librement en commentaire ce qui a rendu le traitement des données plus difficile, d'autre part un problème de communication avec les tuteurs puisque plusieurs tuteurs n'ont pas répondu aux appels ce qui a causé quelques complications. Néanmoins, malgré ces problèmes et malgré les circonstances de la pandémie, l'association Math&Maroc a brillamment réussi ce projet et a pu accompagner des milliers des élèves dans plusieurs régions et villes différentes du Maroc.

Math&Maroc a été finaliste de la compétition MWA



Math&Maroc a participé cette année à la compétition du Web marocain Maroc Web Awards, grâce aux votes de nos abonnés, l'association a été finaliste dans la catégorie Science et Éducation. Nous remercions l'ensemble des personnes qui nous suivent, qu'ils soient des élèves, des étudiants, des parents ou autre, pour leur soutien et leur fidélité.

Math&Maroc est désormais sur Instagram



Afin de bien médiatiser nos projets et communiquer avec nos abonnés qui s'intéressent aux mathématiques olympiques, nous sommes désormais présents sur Instagram. Vous trouverez sur la nouvellement créée page Instagram de l'association un contenu diversifié et amusant, comprenant notamment des astuces, des défis, des témoignages et même des Memes !

ACTUALITÉS DES MATHÉMATIQUES

ANASS BEQQALI

IMO 2020



Comme vous savez cher locuteurs, les Olympiades Internationales de Mathématiques est la plus grande compétition mondiale de mathématiques destinée aux lycéens, et qui est organisée annuellement dans un pays différent. Cette année, les IMOs étaient programmés pour leur 61ème édition du 8 au 18 juillet à Saint-Petersbourg en Russie, malheureusement, à cause de la pandémie COVID 19 et des conditions sanitaires qui ne permettaient pas l'organisation d'un événement de cette ampleur, cette édition a été reportée au mois Septembre dans l'espoir que la pandémie serait mieux contrôlée, et que les participants pourraient se déplacer en Russie sans soucis. Or, ce n'était pas le cas : l'organisation d'une édition des IMOs en présentiel est restée une option impossible.

Dans ce cadre, les organisateurs des IMOs ont décidé de changer la méthodologie cette année et de s'adapter avec les contraintes sanitaires en proposant un déroulement spécial qui respecte l'état sanitaire mondial, et permettra aux élèves de participer à cette grande manifestation scientifique. Il s'agit des IMOs virtuels : un nouveau format qui garantit une confiance au niveau de la concurrence entre les participants et qui respecte les protocoles de sécurité. C'est la 1ère édition dans l'histoire des IMOs qui s'est déroulée sans la présence physique des compétiteurs.

Dans cette perspective, le conseil de l'IMO a imposé une multitude de mesures pour un déroulement optimal. En effet, chaque pays participant possède un centre d'examen qui doit être supervisé par un commissaire neutre de la part de l'IMO. Les examens à distance se dérouleront en webcam pour surveiller les participants, ces vidéos enregistrées sont envoyés directement au staff de surveillance qui est installé en Russie. Les examens seront déroulés en temps universel [GMT] pour éviter les problèmes de décalage horaires entre les pays, et assurer le principe de l'égalité des chances.

La 61ème édition a connu une excellence chinoise au sommet du classement, la république populaire de Chine a obtenu 215 points au total, dépassant la fédération de Russie qui s'est classée 2ème avec un total de 185 points, les Etats-Unis ont pu finir la 3ème place avec 183 points.

Quant à nos élèves marocains dans cette édition, l'équipe était composée de 6 élèves (4 garçons et 2 filles) sous l'encadrement du chef de délégation Mohammed Berraho et l'adjoint Mohamed El Ibboui. L'équipe nationale a récolté 26 points au total, avec 2 mentions honorables obtenues par Aya Aguerjout et Abderrahmane Driouch qui ont obtenu respectivement 14 points et 7 points. De plus, l'élève de première année baccalauréat Aya Aguerjout a reçu le prix Maryam Mirkhazani pour sa performance aux épreuves des IMOs 2020.

Problème de 48 ans résolu en une semaine

Au cours de l'histoire, plusieurs problèmes mathématiques sont restés pendant une longue période sans pouvoir être résolus, d'autres demeurent sans solution même aujourd'hui. Dans ce contexte, le nœud de Conway est l'un des problèmes qui est resté énigmatique pour les mathématiciens et a occupé le temps de recherches de plusieurs d'entre eux. Ce problème a été formulé en 1970 mais il a fallu attendre jusqu'à 2018, année durant laquelle Lisa Piccirillo, une jeune diplômée de l'université de Texas va le résoudre en moins d'une semaine, mettant fin à plusieurs tentatives vaines de résolution qui ont duré environs 48 ans. La solution de la jeune mathématicienne vient d'être validée et publiée en Février 2020.

En fait, ce problème, proposé par le célèbre John Horton Conway (voir portrait d'un mathématicien), fait partie du cadre général de la théorie des nœuds, un large sous-domaine de la topologie qui possède une pléthore d'applications dans plusieurs secteurs éloignés des mathématiques pures. A titre d'exemple, on trouve des applications de cette théorie dans le domaine de la santé puisqu'elle nous a permis une meilleure compréhension de l'ADN ou encore dans l'explication de certaines notions complexes de la physique quantique.

Prix Princesse des Asturies 2020

Le prix Princesse des Asturies est un prestigieux prix espagnol, délivré par la Fondation Princesse des Asturies qui récompense des grands travaux dans huit catégories : arts, sports, sciences sociales, communication et humanités, concorde, coopération internationale, recherche scientifique et technique, et lettres.



Cette année, pour la catégorie recherche scientifique et technique, le prix Princesse des Asturies a été décerné à quatre mathématicienne et mathématiciens et qui sont : Yves Meyer, un grand mathématicien français qui a remporté le prix Abel en 2017 pour son développement de la théorie des ondelettes , Ingrid Daubechies une physicienne et mathématicienne belge, Terence Chi-Shen Tao est un mathématicien australien, médaillé Fields en 2006, spécialisé dans l'analyse harmonique, les équations aux dérivée partielles et la théorie des représentations, sans oublier Emmanuel Jean Candès, un mathématicien français titulaire de la chaire Barnum-Simons en mathématiques et statistiques, il travaille sur l'analyse harmonique, le traitement du signal, l'optimisation mathématique et la théorie de l'information.

Ils sont récompensés pour leurs contributions importantes dans la théorie des ondelettes qui trouve ses applications dans les technologies numériques, ainsi que leurs travaux autour des techniques actuelles de traitement des données et des signaux qui sont la base du monde numérique.

Prix d'Alembert et Jacqueline Ferrand

La Société Mathématique de France décerne tous les deux ans deux grands prix : le Prix D'Alembert et le Prix Jacqueline Ferrand. Le premier est dédié à l'encouragement de la diffusion des mathématiques pour le large public, avec une somme de 2000 Euros comme récompense, et le second encourage les innovations pédagogiques importantes.

Pendant cette édition, le jury commun aux deux Prix s'est réuni le 24 juin 2020. Suite aux délibérations, les prix ont été répartis de la manière suivante : le prix D'Alembert est attribué au festival de l'association "Les Maths en Scène" pour son travail qui combine ateliers, conférences, spectacles et débats, et qui implique la mobilisation de plusieurs enseignants et chercheurs. Le prix Jacqueline Ferrand quant à lui a été décerné à l'opération La Grange Vadrouille/La Grange Ecole porté par l'association La Grange des Maths pour leur approche unique et concrète d'enseignement des mathématiques, utilisant un matériel pédagogique de haute gamme.



AUTOUR DES MATHÉMATIQUES

www.mathemaroc.com

Numéro 8, 2020

Beauté des mathématiques : LA PSYCHOLOGIE DES MATHÉMATIQUES OU LES MATHS DE LA PSYCHOLOGIE

MOUAD MOUTAOUKIL

Nous explorons dans cet article le mystérieux lien entre mathématiques et psychologie. Ces deux sciences à première vue indépendantes et éloignées l'une de l'autre présentent un domaine d'intersection plutôt vaste et extrêmement prometteur.

Ce lien entre science et conscience, entre ce qui est psychologique et logique, constitue actuellement un sujet de recherche intéressant aussi bien pour les mathématiciens que pour les chercheurs en psychologie. Dans la première partie de cet article, nous allons traiter les applications des maths en psychologie, ou ce qu'on appelle psychologie mathématique. Alors que la deuxième partie sera consacrée à l'analyse de la psychologie des élèves et les raisons qui poussent un bon nombre à détester cette discipline pourtant pleine de beauté et de magie.

Les maths de la psychologie ou la psychologie mathématique

Souvent, les choses vécues au quotidien s'expliquent par des théories mathématiques, et de même, cette science, dans son abstraction et idéalité, trouve souvent des applications dans divers domaines scientifiques, économiques, sociaux et même psychologiques.

Considérons comme premier exemple la théorie de la percolation. Cette dernière est en effet observée à la fois dans la biologie humaine, dans la sociologie, mais aussi dans la psychologie. Cette théorie mathématique a été établie afin de répondre à certains questionnements en rapport avec les sciences humaines, les sciences de la matière et la biologie. Elle concerne l'analyse d'un phénomène comportant deux états aléatoires. Il s'agit en effet du passage d'un état quelconque vers un autre, et ce, de manière instantanée.

Dans le domaine de la psychologie, la théorie de la percolation sert entre autres à étudier la nervosité. Elle peut alors expliquer le passage brusque d'une personne à un sentiment d'apaisement et de calme vers son énervement. Cet ajustement de comportement se fait immédiatement suite à un geste, un fait ou une situation extérieure causant la nervosité. Dans ce cas, le seuil de percolation peut aider à identifier les paramètres qui entraînent cet état chez un individu. Pour ce faire, il faut cependant prendre plusieurs variables en jeu.

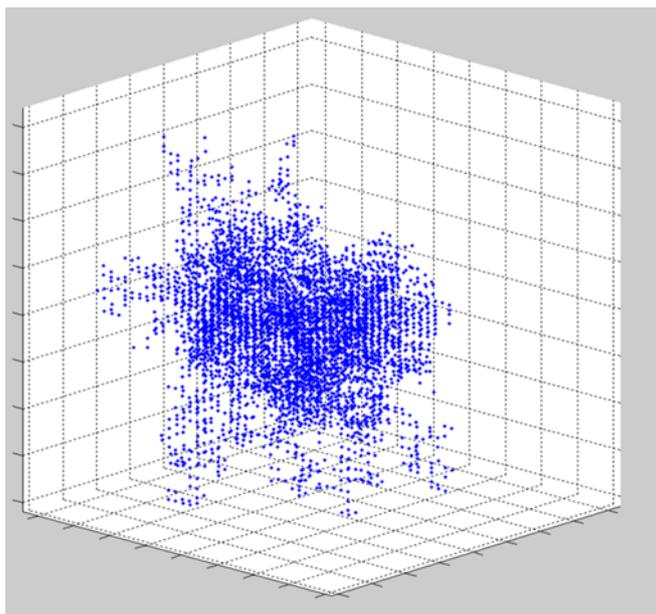


FIGURE 1 – Un graphe tridimensionnel de percolation

Revenons à un plan plus général, la psychologie mathématique est l'appellation qu'on donne à l'approche de la recherche psychologique basée sur la modélisation mathématique des processus perceptifs, cognitifs et moteurs, et sur l'établissement de règles qui relient les caractéristiques de stimulus quantifiables à un comportement quantifiable. Cette branche liant psychologie et mathématiques a vu le jour au 19e siècle grâce aux deux chercheurs Ernst Weber (1795-1878) et Gustav Fechner (1801-1887).

L'approche mathématique est utilisée dans la psychologie en s'intéressant aux comportements dits quantifiables. Un comportement quantifiable est en pratique souvent constitué par la performance de la tâche. Vu que la quantification du comportement est fondamentale dans ce domaine, la théorie de la mesure est l'un des sujets centraux en psychologie mathématique. A l'instar des neurosciences computationnelles et de l'économétrie, la théorie de la psychologie mathématique utilise souvent l'optimalité statistique comme principe directeur, en supposant que le cerveau humain a évolué pour résoudre les problèmes de manière optimisée.

Les psychologues mathématiciens sont actifs dans de nombreux domaines de la psychologie, notamment en psychophysique, sensation et perception, résolution de problèmes, prise de décision, apprentissage, mémoire et langage, collectivement connus sous le nom de psychologie cognitive, ainsi que l'analyse quantitative du comportement mais aussi, par exemple, en psychologie clinique, en psychologie sociale et en psychologie de la musique.

La psychologie mathématique a permis d'expliquer plusieurs phénomènes sociaux et psychologiques. C'est un domaine toujours en cours de développement ayant des intersections avec plusieurs autres thèmes dont on cite : les modèles de la cognition et de l'apprentissage, la théorie de la décision, l'intelligence artificielle, les sciences cognitives, la théorie des jeux, le connexionnisme et la théorie de mesure.

Psychologie des maths : pourquoi certains élèves ont-ils peur des maths ?



Depuis plusieurs années, la réputation des mathématiques chez le grand public et dans les rangs des élèves et étudiants a considérablement chuté. Les maths, pour le non spécialiste, ne sont plus cette science fascinante qui permet d'expliquer des phénomènes naturels et des choses vécues au quotidien, mais plutôt une boule d'abstraction incompréhensible et une source de stress pour les élèves. Pourquoi cette vision péjorative des maths de la part de la société ? Pourquoi la majorité des collégiens et lycéens détestent-ils cette discipline ?

Dans un premier lieu, le blocage chez les élèves vient d'un rejet de la société toute entière envers les mathématiques. Ce rejet quant à lui est dû à la vision répandue des maths comme étant une discipline élitiste, inaccessible, incompréhensible et même inutile pour un bon nombre de personnes. En effet, le citoyen moyen ne voit pas l'utilisation des maths autour de lui, et ne cherche pas à comprendre le pourquoi et le comment des choses. L'esprit de consommation passive et du prêt à utiliser est désormais un problème profondément ancré dans notre société actuelle. Y remédier nécessite une vulgarisation à grande échelle, touchant toutes les composantes de la société et surtout les jeunes.

Dans un deuxième lieu, on cite un facteur décisif qui mène les élèves à détester ou même avoir peur des maths ; ce n'est autre que la réforme de l'enseignement des maths qui a eu lieu dans les années 1970 en France et qui a été calquée par le Maroc. Cette réforme a mené à une présentation des maths très abstraite et d'un haut niveau plutôt élevé pour les élèves de collège ou de lycée, contrairement à au système d'enseignement adoptés par certains pays asiatiques ou d'Amérique, qui se concentrent plus sur ce qui est important et montre l'utilité et l'origine du raisonnement avant de le formaliser.

En général, les enfants qui ont des difficultés en mathématiques présentent des profils psychologiques variés. Les causes et conséquences de ces difficultés apparaissent comme très diversifiées, et ne peuvent être envisagées sous un seul et même modèle explicatif. Prudence et souplesse interdisciplinaire, de la part des enseignants, psychologues ou psychiatres, sont donc de rigueur pour comprendre et remédier efficacement aux difficultés de ces élèves.

Pour conclure, revaloriser les mathématiques est une nécessité aujourd'hui. Il faut rappeler aux gens qu'aucune ville n'aurait existé sans les mathématiques : elles sont indispensables à la gestion de tout regroupement de plus de quelques centaines d'individus, pour recenser et partager le temps et les richesses. Un enseignement concret des maths est également de mise, il est important de montrer aux personnes qui pensent que les maths sont des recettes qu'on applique qu'ils ont tort, et que les maths sont avant tout un moyen de comprendre et d'expliquer la réalité.

Utilité des mathématiques : PHYSIQUE & TOPOLOGIE

HOUSSAM SABRI

1 Introduction

La physique qui est une discipline scientifique connue depuis l'antiquité, et la topologie qui est un sous-domaine des mathématiques relativement nouveau étudiant des objets mathématiques abstraits, peuvent apparaître à première vue deux domaines qui sont indépendants l'un de l'autre. Néanmoins, les récents progrès en physique permettent de voir clairement l'empreinte de la topologie, dans différents domaines de la physique comme la relativité, la physique de la matière condensée, l'optique et la photonique. En effet, le prix Nobel de physique en 2016 a été attribué à D.J. Thouless, D. Haldane et J. M. Kosterlitz pour leurs travaux sur les transitions des phases topologiques dans la matière[1].

2 La topologie, c'est quoi ?

La topologie est une branche des mathématiques qui étudie les propriétés des objets géométriques préservés sous les déformations continues "Homéomorphismes" (élongation, torsion, traction, flexion...) sans arrachement ni recollement (créer, remplir des trous ou des ruptures dans l'objet).

Definition 2.1. *Homéomorphisme*

Une application $f : X \rightarrow Y$ entre deux espaces topologiques X, Y est appelée homéomorphisme si :

1. f est bijective
2. f est continue et son inverse f^{-1} est continue aussi.

On dit que deux objets sont topologiquement équivalents s'il existe un homéomorphisme qui peut changer l'un à l'autre et vice-versa, par exemple la sphère est topologiquement équivalente à un cube, un tore est équivalent à un mug. En topologie, ces objets sont des surfaces à deux dimensions qui flottent dans un espace à trois dimensions.



FIGURE 2 – Déformation continue d'un mug en un tore.[8]

Ce qui rend les objets comme le tore et le mug, ou la sphère et le cube, équivalents pour les topologues, autre que la définition citée avant, est l'existence d'une caractéristique qui reste invariante par déformation continue (invariant topologique).

Il existe plusieurs façons pour caractériser un objet topologique, on peut citer par exemple la caractéristique d'Euler χ , les objets topologiques avec le même χ sont considérés équivalents. Dans le cas des polyèdres, la caractéristique d'Euler est $\chi = S - A + F$, où S est le nombre de sommets, A nombre d'arêtes et F nombre de faces. Le théorème de Gauss-Bonnet (dans sa forme simplifiée) [4], lie la géométrie à la topologie des surfaces bidimensionnelles dans des espaces 3D, et permet de généraliser cette caractéristique d'Euler et la lie à la courbure de Gauss $\Omega(r)$ de la surface étudiée. En effet, pour une surface fermée \mathcal{S} (sans bords) et orientable on peut définir la caractéristique d'Euler ($\chi \in \mathbb{Z}$) :

$$\chi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{S}} \Omega(r) dr = 2(1 - g) \tag{1}$$

Le g qu'on appelle le genre est aussi un invariant topologique qu'on définit à partir de χ et vaut 0 pour les objets équivalents à une sphère, 1 pour les objets équivalents à un tore, le genre peut être interprété comme le nombre des trous dans l'objet topologique étudié.

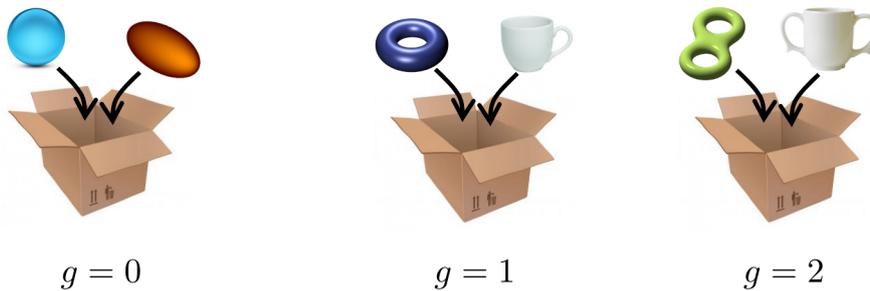


FIGURE 3 – Des objets de genre $g = 0, 1, 2$ [4]

3 Et la physique, où est-elle dans tout ça ?

Cette idée d'invariant topologique donne naissance à la notion de "protection topologique" (appelée parfois stabilité topologique), les systèmes qui ont cette propriété sont qualifiés de ro-

bustes car ils sont protégés de l'effet des déformations -continues-, cette robustesse topologique est d'un grand intérêt pratique, si une quantité physique s'écrit comme l'intégrale sur une ligne fermée ou sur une surface fermée d'une quantité liée à une courbure, cette quantité sera insensible aux déformations et changements de détail du système considéré. Il existe plusieurs systèmes qui mettent en évidence cet effet lié à la topologie, citons quelques exemples :

3.1 Skyrmions magnétiques

Les skyrmions magnétiques sont des structures magnétiques de taille nanométrique. Ils suscitent un intérêt considérable pour leur potentiel en stockage de l'information magnétique (mémoires magnétiques).

Les skyrmions magnétiques sont des configurations particulières de spin (moments magnétiques intrinsèques) qui ont la propriété de "protection topologique"[2]. En effet, on peut définir un invariant topologique pour les skyrmions magnétiques appelé charge topologique (ou parfois nombre d'enroulements (winding number)) lequel est :

$$\mathcal{W} = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{M} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial y} \right) dx dy \quad \mathcal{W} \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

Où \mathbf{M} est l'aimantation locale, les skyrmions sont des structures de spins qui ont une charge topologique non nulle ($|\mathcal{W}| > 0$).

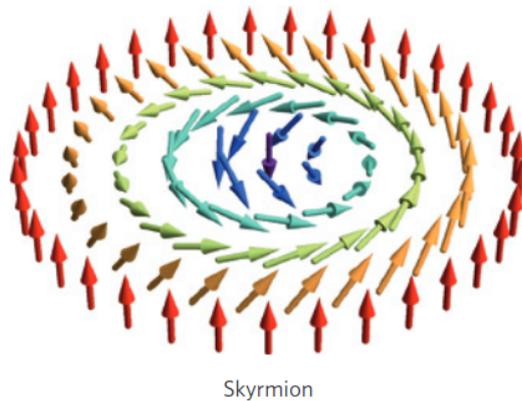


FIGURE 4 – Skyrmion magnétique avec une charge topologique $|\mathcal{W}| = 1$. [6]

Les skyrmions magnétiques peuvent être formés et déplacés avec un faible coût énergétique, et sont plus stables face aux perturbations extérieures telles que des fluctuations de température ou de champ magnétique, les technologies basées sur les skyrmions font l'objet de recherche en spintronique surtout dans le but de l'accroissement du pouvoir de traitement des ordinateurs, au-delà même des limites de la loi de Moore.

3.2 L'effet Hall quantique

L'effet Hall quantique, est une version quantique de l'effet Hall classique, observé dans des gaz bidimensionnels des électrons (Système d'électrons 2D) dans des basses températures et à forte

présence du champ magnétique, dans lequel la conductivité transversale (appelé conductivité de Hall) σ_{xy} suit des transitions quantiques de Hall pour prendre des valeurs quantifiées.

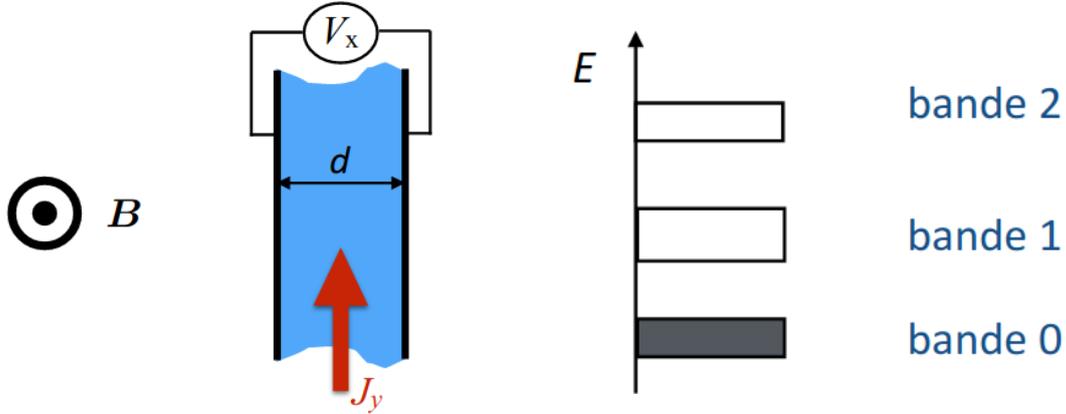


FIGURE 5 – Matériau 2D sous champ \mathbf{B} , avec un remplissage “isolant” (bande 0 remplie)

Il s’agit d’un isolant donc $\mathbf{J}_x = 0$, mais un courant transversal apparaît \mathbf{J}_y , en effet en utilisant la loi de Joule on a :

$$\mathbf{E}_x = \sigma_{xy} \mathbf{J}_y \quad (3)$$

En utilisant la théorie de la réponse linéaire et la formule de Kubo, la conductivité s’exprime comme :

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} \nu \quad \nu \in \mathbb{N}^* \quad (4)$$

Ce qui est fascinant est que Thouless et ses collaborateurs [9] ont montré que cette conductivité est un invariant topologique. Cette quantification de conductivité est d’origine topologique et est liée à la courbure de berry \mathcal{B}

Definition 3.1. *Connexion et courbure de Berry*

Nous considérons ici un système quantique avec une fonction d’onde de la bande n , $|\psi_n\rangle$ ce système évolue selon l’équation de Schrodinger.

$$i\hbar \frac{d|\psi_n\rangle}{dt} = \mathcal{H}(\lambda) |\psi_n\rangle \quad (5)$$

Il est commode de considérer pour chaque valeur de λ une base orthonormée d’états propres de l’Hamiltonien \mathcal{H} qui satisfait :

$$\mathcal{H}(\lambda) |\psi_n\rangle = E_n(\lambda) |\psi_n\rangle \quad (6)$$

Nous supposons qu’initialement le système dans un état propre du Hamiltonien, et qu’il reste dans cet état propre lors de l’évolution lente des paramètres du Hamiltonien. C’est-à-dire :

$$|\psi\rangle = c_n(t) |\psi_n[\lambda(t)]\rangle \quad (7)$$

On introduit alors ce $|\psi\rangle$ dans l’équation de Schrodinger, on intègre et on trouve deux types de phases, une phase dynamique θ_{dyn} liée à l’énergie et une phase géométrique θ_{geom} liée à la topologie de la bande (Phase de Berry).

$$\theta_{dyn} = -\frac{1}{\hbar} \int_0^T E_n[\lambda(t)] dt \quad \theta_{geom} = i \int_0^T \langle \psi_n[\lambda(t)] | \frac{d}{dt} | \psi_n[\lambda(t)] \rangle dt \quad (8)$$

Cette phase géométrique est caractéristique intrinsèque au Hamiltonian pour chaque λ , il est possible de réexprimer cette phase comme l'intégrale le long du chemin Γ dans l'espace des paramètres λ .

$$\theta_{geom} = \int_{\Gamma} i \langle \psi_n[\lambda] | \nabla_{\lambda} | \psi_n[\lambda] \rangle d\lambda = \int_{\Gamma} \mathcal{A}(\lambda) d\lambda \quad (9)$$

$\mathcal{A}(\lambda)$ est appelée connexion de Berry et on définit la courbure de Berry \mathcal{B} à partir de cette connexion par :

$$\mathcal{B}(\lambda) = \nabla_{\lambda} \times \mathcal{A}(\lambda) \quad (10)$$

En effet, ce lien entre la conductivité de Hall et la courbure de Berry est ce qu'on appelle le nombre de Chern \mathcal{C} , lequel est l'invariant topologique.

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} \mathcal{C} \quad \mathcal{C} = \frac{1}{2\pi} \int_{ZdB} \mathcal{B}(\mathbf{q}) d\mathbf{q} \quad (11)$$

Ici on fait l'intégrale sur la zone de Brillouin (ZdB) (maille primitive dans l'espace réciproque (de Fourier) de paramètre \mathbf{q}).

3.3 Isolant topologique

Un isolant topologique est un matériau ayant une structure de bande de type isolant mais qui possède des états de surfaces métalliques. Ces matériaux sont donc isolants "en volume" et conducteurs en surface.

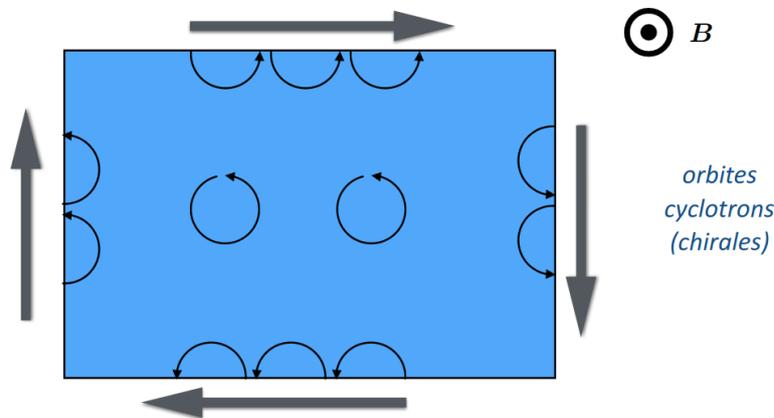


FIGURE 6 – Existence de courants de bord (conductance de surface) dans un gaz d'électrons soumis à un champ magnétique intense[4]

En effet, pendant longtemps les physiciens se sont surtout intéressés à la partie énergétique de la structure de bandes, mais la partie liée à la topologie n'est mise sous la loupe que récemment, pourtant, de nombreuses informations sont encodées dans la topologie des fonctions d'ondes.

Deux Hamiltoniens gappés (avec un gap dans la structure de bande) sont topologiquement équivalents s'ils peuvent être déformés continument l'un en l'autre sans passer par une transition métallique. Les isolants qu'on connaît (par exemple le sel (chlorure de sodium), quartz...) font

partie des isolants de classe topologique triviale (l'invariant topologique est nul), les autres sont dits isolants topologiques, dont l'exemple de l'effet Hall quantique (entier) fait partie, et ils sont en général caractérisés par un invariant topologique non nul (nombre de Chern) et par une structure de bande de type qu'on voit dans la figure 6.

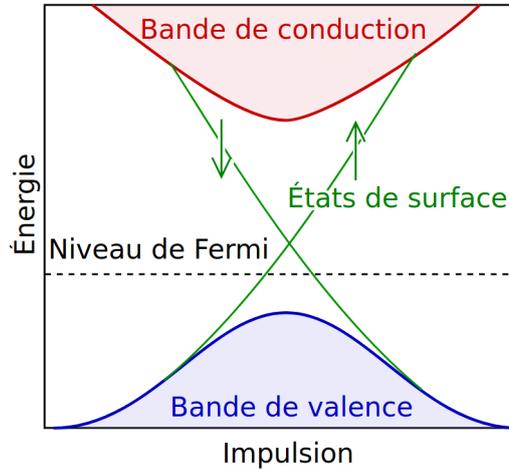


FIGURE 7 – Bandes d'énergie d'un isolant topologique : les états de surface permet le lien et brise le gap entre les deux bandes, ce qui permet d'avoir un conduction de la surface

Les isolants topologiques tridimensionnels et certains isolants topologiques 2D sont classifiés au moyen d'un invariant topologique distinct du nombre de Chern \mathcal{C} il s'agit de l'invariant \mathbb{Z}_2 qui compte la parité du nombre des états de bord symétriques par renversement du temps, on l'exprime :

$$\mathbb{Z}_2 = \frac{1}{2\pi} \left[\oint_{Bord} \vec{\mathcal{A}}(\vec{k}) d\vec{l} - \int_{Volume} \vec{\mathcal{B}}(\vec{k}) d\vec{S} \right] \text{mod}(2) \quad (12)$$

Cet invariant prend des valeurs non nulles si le nombre des états de bord symétriques par renversement du temps est impaire, le composé $\text{Bi}_{1-x}\text{Sb}_x$ est le premier isolant topologique 3D trouvé expérimentalement, sa structure de bande évolue en fonction de x (concentration de l'antimoine Sb) avec une inversion de la bande pour x supérieur à 7%. [7]

Les invariants topologiques permettent de caractériser la classe des isolants et si on peut passer par les déformations continues (homéomorphismes) d'une structure de bande à l'autre, le nombre de Chern ou \mathbb{Z}_2 restent inchangés, par contre les gaps se referment et un état conducteur au bord se crée entre des isolants avec des invariants topologiques différents (par exemple le cas de l'effet Hall quantique le gaz avec \mathcal{C}_g non nul est l'air avec $\mathcal{C}_a = 0$). [3]

4 Conclusion

Ces concepts fondamentaux de robustesse topologique se sont vite disséminés au-delà de la physique des électrons, maintenant ils sont appliqués presque partout en physique, en photonique, avec les photons en utilisant des cristaux photoniques avec bande topologique, en mécanique, en optique (polarisation). Ces concepts ont trouvé des applications même en géophysique, en effet,

certaines ondes océaniques et atmosphériques au niveau de l'équateur, viennent d'être formellement interprétées comme des états de bord topologiques coincés entre les deux hémisphères.[5]

Références

- [1] The nobel prize in physics 2016. <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2016/summary/>.
- [2] ALBERT FERT, NICOLAS REYREN, V. C. Magnetic skyrmions : advances in physics and potential applications. *Nature Reviews Materials* 2 (2017).
- [3] CRÉPIEUX, A. *Introduction à la physique de la matière condensée : Propriétés électroniques*. Dunod, 2019.
- [4] DALIBARD, J. Fluides quantiques de basse dimension et transition de Kosterlitz-Thouless. *Cours de collège de france* (2017).
- [5] DELPLACE, P., MARSTON, J. B., AND VENAILLE, A. Topological origin of equatorial waves. *Science* (2017).
- [6] DUINE, R. Skyrmions singled out. *Nature Nanotechnology* 8 (2013).
- [7] HASAN, M. Z., AND MOORE, J. E. Three-Dimensional Topological Insulators. *Annual Review of Condensed Matter Physics*. 2 (2011).
- [8] KEENAN CRANE, ULRICH PINKALL, P. S. Robust fairing via conformal curvature flow. *ACM Transactions on Graphics* 32, 4 (2013).
- [9] NIU, Q., THOULESS, D. J., AND WU, Y.-S. Quantized Hall conductance as a topological invariant. *Physical Review B* 31 (1985).



MATHÉMATIENS, D'HIER ET
D'AUJOURD'HUI

www.mathemaroc.com

Numéro 8, 2020

LE COIN DES ANCIENS : BENCHEKROUN MAMOUN



Ma participation aux olympiades internationales de mathématiques remonte à 3 ans. J'ai vécu beaucoup d'expériences entretemps, mais les olympiades restent ce qui m'a marqué le plus. Je me souviens du moindre détail comme si c'était hier et les décisions que j'ai prises à cette période ont eu (et ont encore) beaucoup d'influence sur ma vie.

L'origine de ta passion pour les mathématiques ?

Ma passion pour les maths a commencé lorsque j'étais encore enfant. J'oubliais toujours ma calculatrice alors pour m'adapter et ne pas perdre de temps j'avais commencé à faire les calculs de tête. Ainsi tandis que pour trouver le sommeil certaines personnes s'amuse à compter des moutons, je m'endormais en faisant du calcul mental. D'aussi loin que je me souviens, j'ai toujours été partisan du moindre effort. Je travaillais le minimum pour réussir et j'ai toujours été contre le bachotage. On peut tout construire soi-même alors je ne voulais laisser à personne le droit de m'enlever le plaisir de la découverte d'un concept, d'une méthode. . . .

J'ai toujours eu beaucoup de difficulté à faire du par-cœur. J'ai beaucoup d'admiration pour les personnes pouvant retenir par cœur des pages entières mais ça a toujours été au-dessus de mes forces. Cela a eu un grand impact sur ma vie car j'ai toujours cherché à comprendre

tout ce qui m'entoure, ce qui m'exemptait de l'opération de l'apprentissage. J'ai très tôt pris une mauvaise habitude qui est celle de réfléchir dans le vide sans prendre de feuille ni de stylo. Ainsi mon cerveau est toujours en réflexion perpétuelle et je trouve souvent des solutions à des exercices ou à des problématiques en mangeant, en parlant avec des amis ou en me réveillant. Cependant cela donne l'impression que je ne fais jamais rien ce qui n'était pas du goût de mes parents ! Néanmoins je suis tombé un jour sur une citation de Alain Connes, médaille de Fields 1982, qui m'a encouragé dans cette voie « *En fait, on est plus créatif lorsqu'on ne fait rien. Je veux dire, lorsqu'on fait autre chose que des maths. Des promenades, par exemple. Il faut accepter de perdre son temps pour se construire une image mentale du problème.* »

J'ai toujours eu beaucoup de facilités dans mes études et comme beaucoup de mes camarades des olympiades je trouvais que les mathématiques que l'on faisait au lycée étaient trop faciles. Mais contrairement à eux, je n'ai jamais été chercher des exercices supplémentaires plus stimulants (Je suis partisan du moindre effort, vous vous souvenez ?). Les choses ont quelque peu changé quand je suis entré en 1ère Bac Sciences Mathématiques. Notre professeur de mathématiques, Mr Chlieh, nous mettait des devoirs pour le moins compliqués. C'est là que j'ai découvert que les mathématiques sont infiniment plus complexes et intéressantes que je ne le pensais.

Pour une fois des exercices scolaires me prenaient du temps à faire et je trouvais cela amusant ! Je me souviens qu'à la fin de l'heure, il choisissait l'exercice le plus difficile de la feuille et promettait un +1 au premier qui le résolvait. Il tenait sa promesse mais trouvait quasiment toujours le moyen de refuser de valider la solution pour un petit détail qui manquait ou qui était passé sous silence. C'est ainsi que j'ai appris la rigueur mathématique. En parallèle j'avais un professeur de physique, Mr Omari, absolument fascinant. C'est là que ma passion pour la physique est née (passion hélas quelque peu éphémère).

C'est également dans son cours que j'ai pris la mauvaise habitude de ne pas écrire, j'étais tellement fasciné par ce qu'il disait que je ne voulais pas perdre le temps à coucher cela sur le papier et je préférais mobiliser toutes mes ressources mentales pour assimiler les informations. Bien évidemment, cette vision des choses n'a pas plu à mon professeur et cela a été un sujet de dispute constant entre nous avant qu'il ne s'incline, las. Cependant il m'a quand même choisi pour participer aux olympiades de physique. Heureusement au dernier moment mon professeur de mathématiques m'a désinscrit afin de m'inscrire en mathématiques, et je lui serai toujours reconnaissant pour cela car il a sans nul doute changé ma vie ! J'avais appris le jeudi que je passais la première épreuve le lendemain. J'ai fait quelques recherches sur internet pour trouver d'anciens sujets et je suis tombé sur des exemples sur Naja7Maths. Cela m'a un peu démotivé car les solutions des exercices étaient assez longues et j'ignorais comment c'était possible d'avoir toutes ces idées.

Le jour J je suis allé avec mes amis au centre de passage Ibn Khaldoun. On était une cinquantaine et j'étais plutôt intimidé, ayant l'impression que tous les autres candidats étaient beaucoup plus forts et préparés que moi. 3 exercices, 4h30. Au bout d'une heure je n'avais toujours aucune idée de comment procéder. Je me rappelle que j'échangeais quelques sourires avec mes amis, ces sourires qui traduisent une incompréhension totale, ces sourires qui rassurent car tu te dis que c'est dur pour tout le monde. Au bout d'une heure et demie on n'était plus qu'une dizaine dans la salle, à se battre avec ces exercices qui me paraissaient insurmontables à l'époque. Finalement dans la dernière demi-heure j'ai pu résoudre in extremis 2 exercices sur 3. Cela m'a permis de comprendre que dans les mathématiques, il était important de persévérer et de ne

jamais abandonner, et c'est ainsi que j'ai découvert les exercices d'olympiades et le plaisir de les résoudre.

Toutes les épreuves qualificatives suivirent le même schéma, j'arrivai à m'en sortir in extremis avec mes maigres connaissances mais une détermination sans faille. Je fus ainsi qualifié aux stages de sélection de l'équipe nationale au sein d'un groupe de 40 élèves issus de tout le Maroc.

Déroulement des stages :

Le premier stage eut lieu au centre de formations nationales à Rabat. J'étais tout d'abord impressionné. Mes camarades parlaient de notions qui m'étaient inconnues, connaissaient l'existence des olympiades internationales et avaient débuté leur préparation depuis longtemps. En classe je me sentais comme un imposteur quand je voyais tout mes camarades en train de répondre aux questions des professeurs et de manipuler des outils qui m'étaient étrangers. Cependant je me disais que si j'étais là, j'avais mes chances pour décrocher un ticket pour Rio De Janeiro donc je me suis battu durant les épreuves pour mériter ma place. J'étais très faible en géométrie donc je partais avec un gros désavantage, et ce thème ne m'intéressant guère je ne pus jamais trouver la motivation pour le travailler alors même que cela me garantissait 7 points de retard sur mes camarades à chaque stage.

Je me suis trouvé un goût particulier pour la combinatoire et l'arithmétique et ces domaines représentaient mes points qui m'ont permis de me qualifier pour la finale puis pour le Brésil. Je pense que cela est dû au fait que la géométrie ne pouvait se travailler qu'avec un papier et un stylo alors que j'aimais faire des maths en me promenant ou couché dans mon lit en train de rêvasser. Mais outre la formation, ces stages m'ont permis de croiser des personnes formidables qui m'ont accompagné lors de ma scolarité, que ce soit des camarades de ma promotion ou des encadrants de Maths&Maroc. Aujourd'hui j'en ai malheureusement perdu de vue certains mais il me reste toujours de superbes amitiés issues des olympiades. Alors certes cette expérience était stressante et difficile (mention spéciale au Team Selection Test où plusieurs personnes n'ont pu retenir leurs larmes à la suite des tests ou à l'annonce des résultats), mais je ne regrette absolument pas d'avoir choisi cette voie car à ce jour ça reste l'expérience la plus enrichissante que j'ai eue.

Déroulement des Imos

Mes prédécesseurs ont plutôt bien résumé l'état d'esprit qui caractérise chacun d'entre nous durant les IMO. Si je devais décrire cette expérience en quelques mots, je dirais que c'est avant tout une grande fierté mais également une grande responsabilité de représenter son pays, ce qui est peut-être un poids trop lourd à porter pour un jeune de 17 ans. Se trouver dans une grande salle avec 600 personnes qui ont tous passé des sélections nationales et sont les meilleurs de leur pays, c'est pour le moins stressant et cela peut très facilement faire perdre ses moyens à un candidat, ce qui explique certaines sous performances de participants. J'ai pu remporter finalement une mention honorable avec un score de 13 points. J'étais un peu déçu de ne pas

avoir obtenu de médaille mais j'étais satisfait que le Maroc se soit classé 67ème avec 75 points, ce qui représentait le meilleur résultat des 10 dernières années.



Après les IMOS ?

J'ai intégré les classes préparatoires Maths-Physique au lycée Pierre de Fermat. Le déroulement de ma prépa était un peu à l'image de mon lycée, à savoir la politique du moindre effort. Les réflexes acquis lors de la pratique des olympiades m'ont permis de m'en sortir sans sombre dans le bachotage excessif. On m'a souvent posé la question sur les points communs entre les maths en prépa et les olympiades. Je dirai que c'est totalement différent. Tandis que les olympiades réclament du participant de trouver une solution atypique à un problème original dans un laps de temps assez long en utilisant des outils basiques, les maths de prépa réclament du candidat la connaissance de plusieurs lemmes intermédiaires qui combinés ensemble permettent d'aboutir à la solution, et cela dans un laps de temps qui est court. J'ai intégré finalement Centrale Paris. En parallèle je suis pour le plaisir un master de mathématiques fondamentales à l'université de Paris pour ne pas trop m'éloigner des maths ! Et je compte poursuivre un doctorat aux Etats-Unis si tout se passe bien.

Ton expérience avec Maths&Maroc ?

Lors de mon expérience des olympiades, j'ai eu la chance d'être suivi et encadré par des membres de Math&Maroc. Leur aide m'a été très précieuse et cela m'a poussé à très rapidement m'investir dans l'association lorsque j'ai rejoint les études supérieures. L'association se base sur un partage de connaissance des anciennes générations vers les nouvelles et elle ne peut subsister que si chaque promotion prend l'initiative de reprendre le flambeau. Pendant ma prépa j'ai participé à deux stages de formation et j'ai ensuite intégré le bureau en 2019 en tant que vice-président. L'association cherche à se diversifier et a ainsi plusieurs projets en cours pour soutenir les jeunes passionnés de mathématiques à différents niveaux. Vous en saurez bientôt plus !

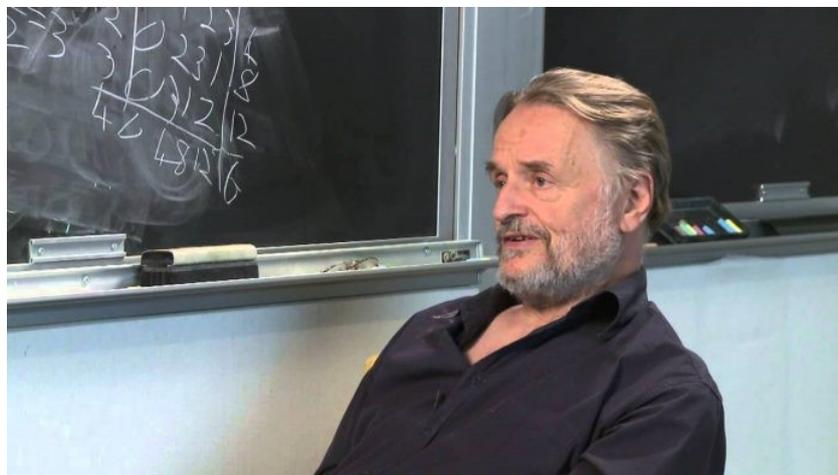
Le mot de la fin.

N'ayez pas peur d'échouer, rêvez grand ! Cher lecteur, ne laisse jamais personne te dire que tu ne peux pas faire quelque chose. Si tu veux quelque chose tu peux l'avoir ! Peu de choses sont impossibles à celui qui est assidu. . . En mathématiques comme dans la vie, il ne faut jamais baisser les bras car on est peut-être à un cheveu près de la réussite. Le chemin de la réussite n'est pas le même pour tout le monde, alors cherche ta propre voie, une voie que tu parcourras avec plaisir et qui vaut le coup de faire des sacrifices, et ne laisse personne te dicter ce que tu dois faire car après tout, on n'a qu'une vie !

Portrait d'un mathématicien : JOHN HORTON CONWAY : l'immortel joueur de la vie

MOUAD MOUTAOUKIL

JOHN HORTON CONWAY est l'une des figures les plus emblématiques du monde des mathématiques, il vient de nous quitter il y a quelques mois à cause de la pandémie que nous sommes en train de vivre actuellement. CONWAY est connu du grand public grâce à son jeu « Game of life », mais ses contributions en mathématiques sont innombrables et font toujours l'objet de recherches dans plusieurs domaines.



CONWAY est né en 1937 en Angleterre, il s'est intéressé très tôt aux mathématiques et avait décidé de devenir mathématicien dès l'âge de 11 ans. Il étudie les mathématiques à Cambridge, au Gonville and Caius College, et obtient son Bachelor of Arts en 1959. Il obtient ensuite son doctorat en 1964, puis intègre l'université de Cambridge en tant que chargé de cours avant de devenir professeur.

CONWAY était un amateur de jeux de toutes sortes. Il a passé des heures dans les salles communes de l'Université de Cambridge, au Royaume-Uni, et de l'Université de Princeton dans le New Jersey à jouer au backgammon, au Go et à d'autres divertissements, certains de sa propre création. Plusieurs des contributions les plus célèbres de CONWAY ont été faites alors

qu'il réfléchissait aux jeux et à leurs stratégies. Sa plus grande découverte a peut-être été une surprenante correspondance entre les nombres et les jeux qui l'ont conduit à créer un système gigantesque, les nombres surréalistes, qui a stupéfié la communauté mathématique. Il contenait non seulement les nombres réels positifs et négatifs, mais aussi de nouveaux nombres infiniment grands, des nombres infiniment petits et toutes sortes de nouveaux nombres entre les deux.

Cette fascination pour les jeux a également conduit CONWAY à développer le Game of Life, un automate cellulaire dans lequel le modèle de cellules vivantes ou mortes dans une grille bidimensionnelle évolue selon un ensemble de règles pour la 'naissance' et la 'mort' de chaque cellule, en fonction de l'état de ses cellules voisines. La simplicité et l'accessibilité de ce jeu ont été popularisées en 1970 par le chroniqueur scientifique américain MARTIN GARDNER. Au milieu des années 70, on estimait qu'un quart des ordinateurs du monde exécutaient le jeu de la vie de CONWAY comme écran de veille.

En algèbre, CONWAY a découvert un autre système de nombres important, les icosiens, avec son collaborateur de longue date NEIL SLOANE. En théorie des nombres, CONWAY a montré que chaque nombre entier est la somme d'au plus 37 cinquièmes puissances. Il a également développé le 15-théorème et la 290-conjecture ; il s'agissait de vastes généralisations du théorème des quatre carrés, prouvé par le mathématicien Lagrange, qui énonce que tout nombre entier positif est la somme de quatre nombres carrés.

Il a reçu plusieurs prix pour ses travaux : prix Berwick (1971), premier lauréat du prix Pólya décerné par la London Mathematical Society (1987), prix Nemmers en mathématiques (1998) et prix Leroy P. Steele pour ses livres décerné par American Mathematical Society (2000).

CONWAY adorait parler de mathématiques et de jeux, ainsi que d'histoire, d'étymologie et de philosophie. Ses contributions à la culture, par son travail et son rayonnement, auront sans doute un impact durable. Il est décédé à l'âge de 82 ans, à cause de complications liées au COVID-19.

Trois puzzles mathématiques inspiré par les travaux de CONWAY (Quanta Magazine)

Puzzle 1 : On considère un mystérieux nombre décimal à 10 chiffres, abcdefghij. Chacun des chiffres est différent et possède les propriétés suivantes :

- a est divisible par 1
- ab est divisible par 2
- abc est divisible par 3
- abcd est divisible par 4
- abcde est divisible par 5
- abcdef est divisible par 6
- abcdefg est divisible par 7
- abcdefgh est divisible par 8
- abcdefghi est divisible par 9
- abcdefghij est divisible par 10

Quel est ce nombre ?

Puzzle 2 : On considère un triangle isocèle qui contient un angle de x degrés. Le rapport des deux longueurs différentes de ses côtés est y .

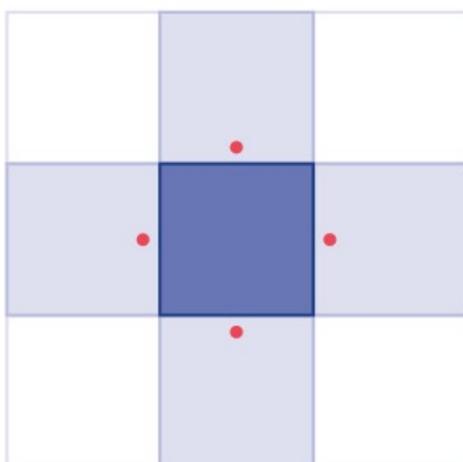
Il s'avère que non pas un mais deux triangles différents ont exactement les mêmes valeurs de x et y !

Quelles sont les valeurs de x et y pour ces deux triangles isocèles ? Quelle est la particularité de ces triangles et comment sont-ils liés au travail de CONWAY ?

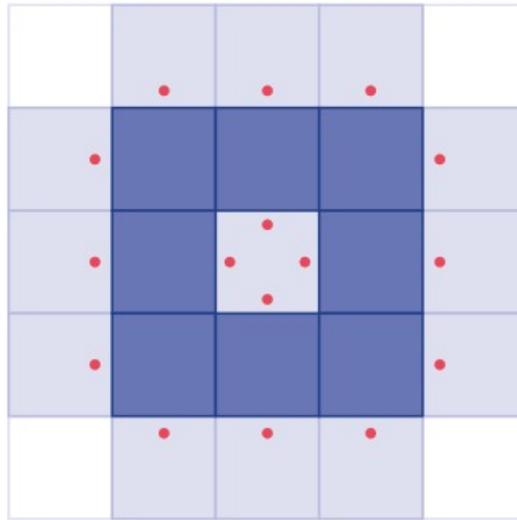
Puzzle 3 : Vous avez un plan infini sur lequel vous placez des carreaux carrés. Une à la fois, vous ajoutez de nouvelles tuiles de manière aléatoire de sorte que chaque nouvelle tuile partage au moins un bord avec une tuile précédemment placée. La probabilité qu'une tuile soit placée à un emplacement donné est proportionnelle au nombre d'arêtes des tuiles précédemment placées qui bordent cet emplacement.

Considérez ces deux exemples :

S'il n'y a qu'une seule tuile, alors la deuxième tuile a une probabilité égale de finir au nord, au sud, à l'est ou à l'ouest de la tuile d'origine.



S'il y a un anneau de huit tuiles, alors il y a 12 positions autour de l'extérieur de l'anneau et une position au milieu, qui sont toutes valables pour le prochain placement de tuiles. Celui du milieu a quatre fois plus de chances de recevoir la tuile que n'importe quel placement extérieur, car il partage quatre bords avec des tuiles précédemment placées, plutôt qu'un seul.



Nous définissons la «pilosité» ou Hairiness (H) ou l'extériorité de toute configuration comme le nombre de bords de carreaux exposés divisé par le nombre de carreaux. Par exemple :

- Avec une tuile sur le plan, $H = 4 \text{ bords} \div 1 \text{ tuile} = 4$.
- Pour un anneau de huit carreaux, $H = 16 \text{ arêtes} \div 8 \text{ carreaux} = 2$.
- Pour une rangée de huit carreaux, $H = 18 \text{ bords} \div 8 \text{ carreaux} = 2,25$.

L'inverse de H peut être appelé l'intériorité ou la compacité de la configuration.



DÉFIS OLYMPIQUES

www.mathemaroc.com

Numéro 8, 2020

EXERCICES

A.1 Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, déterminer le plus petit nombre M telle que :

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

(Irlande)

A.2 soient $a_1, a_1, a_2, \dots, a_{100}$ des réelles positifs telle que : $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{100}^2 = 1$

Montrer que $a_1^2 a_2 + a_2^2 a_3 + a_3^2 a_4 + \dots + a_{100}^2 a_1 < \frac{12}{25}$

(Poland)

G.1 Dans un triangle ABC , la bissectrice de l'angle au sommet C coupe le cercle circonscrit au triangle ABC , la médiatrice du segment $[BC]$ et la médiatrice du segment $[CA]$ aux points R , P et Q , respectivement. Les points médians de $[BC]$ et $[CA]$ sont S et T , respectivement.

Montrer que les triangles RQT et RPS ont la même aire.

(République Tchèque)

G.2 Soit $ABCD$ un trapèze à côtés parallèles tel que $AB > CD$. Les points K et L se trouvent sur les segments de droite AB et CD , respectivement, de sorte que $\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}$.

Supposons qu'il y ait des points P et Q sur le segment $[KL]$ satisfaisant $\widehat{APB} = \widehat{BCD}$ et $\widehat{BQD} = \widehat{ABC}$

Montrer que les points P, Q, B et C sont cocycliques s'ils appartiennent à un même cercle.

(Ukraine)

C.1 Dans le plan de coordonnées cartésiennes, on définit l'ensemble $S_n = \{(x, y), n \leq x < n + 1\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que chaque ensemble S_n soit colorée en rouge ou en bleu et que a et b soient deux entiers positifs distincts. Démontrez qu'il existe un rectangle de longueurs de côté a et b tel que ses sommets aient le même couleur.

(Roumanie)

C.2 Nous avons $n \geq 2$ lampes L_1, \dots, L_n dans une rangée, chacune d'elles étant soit allumée soit éteinte. Chaque seconde on modifie simultanément l'état de chaque lampe comme suit :

- Si la lampe L_i et ses voisins (un seul voisin pour $i = 1$ ou $i = n$, deux voisins pour les autres i) sont dans le même état, alors L_i est désactivé ;
- sinon, L_i est activé. Au départ, toutes les lampes sont éteintes sauf celle la plus à gauche qui est allumée.

(a) Montrer qu'il existe une infinité de nombres entiers n pour lesquels toutes les lampes finiront par s'éteindre.

(b) Montrer qu'il existe une infinité de nombres entiers n pour lesquels les lampes ne seront jamais toutes éteintes.

(France)

N.1. Déterminer toutes les paires $(x, y) \in \mathbb{N}$ telle que :

$$1 + 2^x + 2^{2x+1} = y^2$$

(États-Unis)

N.2. Trouver tous les paires $(k, n) \in \mathbb{N}$ tel que : $7^k - 3^n$ divise $k^4 + n^2$

(Autriche)

N.B : Les solutions des problèmes proposés seront publiées dans le prochain numéro. Tous les lecteurs sont invités à nous faire parvenir leurs solutions, via l'adresse : abdelkaderbenaisat@gmail.com.

Les élèves qui participent à la sélection des Olympiades sont vivement encouragés à nous envoyer leurs résultats, même incomplets.

Toute proposition doit nous parvenir au plus tard le 20 Novembre 2020. Les problèmes et les solutions seront publiés en français, mais vous pouvez soumettre vos solutions dans la langue de votre choix.

SOLUTIONS DES EXERCICES DU NUMÉRO PRÉCÉDENT

A.1 Soit $S = \sum_i a_i$. Notons L et R les expressions à gauche et à droite de l'inégalité proposée. Nous transformons L et R en utilisant l'identité

$$\sum_{i < j} (a_i + a_j) = (n-1) \sum_i a_i \quad (13)$$

ainsi :

$$L = \sum_{i < j} \frac{a_i a_j}{a_i + a_j} = \sum_{i < j} \frac{1}{4} \left(a_i + a_j - \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i + a_j} \right) = \frac{n-1}{4} \cdot S - \frac{1}{4} \sum_{i < j} \frac{(a_i - a_j)^2}{a_i + a_j} \quad (14)$$

Pour représenter R , nous exprimons la somme $\sum_{i < j} a_i a_j$ de deux façons ; dans la seconde transformation l'identité (13) sera appliquée aux carrés des nombres a_i :

$$\begin{aligned} \sum_{i < j} a_i a_j &= \frac{1}{2} \left(S^2 - \sum_i a_i^2 \right) \\ \sum_{i < j} a_i a_j &= \frac{1}{2} \sum_{i < j} (a_i^2 + a_j^2 - (a_i - a_j)^2) = \frac{n-1}{2} \cdot \sum_i a_i^2 - \frac{1}{2} \sum_{i < j} (a_i - a_j)^2 \end{aligned}$$

En multipliant la première de ces égalités par $n-1$ et en ajoutant la seconde on obtient

$$n \sum_{i < j} a_i a_j = \frac{n-1}{2} \cdot S^2 - \frac{1}{2} \sum_{i < j} (a_i - a_j)^2$$

Par conséquent

$$R = \frac{n}{2S} \sum_{i < j} a_i a_j = \frac{n-1}{4} \cdot S - \frac{1}{4} \sum_{i < j} \frac{(a_i - a_j)^2}{S} \quad (15)$$

Comparons maintenant (14) et (15). Puisque $S \geq a_i + a_j$ pour tout $i < j$, il en résulte que $L \geq R$.

A.2 La preuve est obtenue par récurrence. Pour $n = 1$, la formule donne $a_1 = 1/2$. Prenons $n > 1$, supposons $a_1, \dots, a_n > 0$ et écrivons la formule de récurrence pour n et $n+1$, respectivement comme suit :

$$\sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+1} = 0 \text{ et } \sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{n-k+2} = 0$$

La soustraction donne

$$0 = (n+2) \sum_{k=0}^{n+1} \frac{a_k}{n-k+2} - (n+1) \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{n-k+1} = (n+2)a_{n+1} + \sum_{k=0}^n \left(\frac{n+2}{n-k+2} - \frac{n+1}{n-k+1} \right)$$

Le coefficient de a_0 disparaît, donc

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{n+2}{n-k+2} - \frac{n+1}{n-k+1} \right) a_k = \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^n \frac{k}{(n-k+1)(n-k+2)} a_k$$

Les coefficients de a_1, \dots, a_n sont tous positifs. Par conséquent, $a_1, \dots, a_n > 0$ implique que $a_{n+1} > 0$.

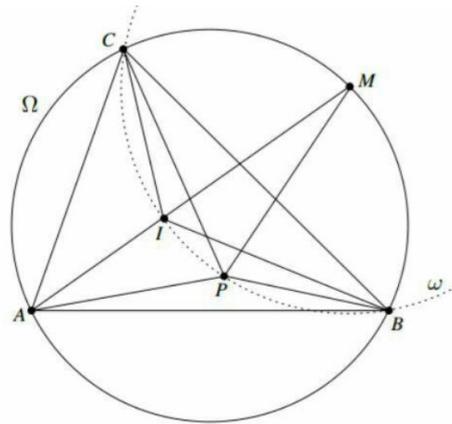
Commentaire. Les élèves familiarisés avec la technique de génération de fonctions reconnaîtront immédiatement $\sum a_n x^n$ comme l'expansion en série de puissance de $x/\ln(1-x)$ (avec la valeur -1 à 0). Mais cela peut être un piège ; les tentatives dans ce sens conduisent à des équations différentielles désagréables et à des intégrales difficiles à gérer. Utiliser uniquement des outils d'analyse réelle (par exemple, calculer les coefficients à partir des dérivés) semble très difficile. D'autre part, les coefficients peuvent être approchés en appliquant des intégrales de contour complexe et certaines autres techniques d'analyse complexe, une formule intéressante peut être obtenue pour les coefficients :

$$a_n = \int_1^\infty \frac{1}{x^n(\pi^2 + \log^2(x-1))} dx \quad (n \geq 1)$$

ce qui est évidemment positif.

G.1 Soient $\widehat{A} = \alpha, \widehat{B} = \beta, \widehat{C} = \gamma$ Puisque $\widehat{PBA} + \widehat{PCA} + \widehat{PBC} + \widehat{PCB} = \beta + \gamma$, la condition de l'énoncé du problème est équivalente à $\widehat{PBC} + \widehat{PCB} = (\beta + \gamma)/2$, i.e $\widehat{BPC} = 90 + \alpha/2$.

D'autre part $\widehat{BIC} = 180 - (\beta + \gamma)/2 = 90 + \alpha/2$ Donc $\widehat{BPC} = \widehat{BIC}$, et puisque P et I sont du même côté de BC , les points B, C, I et P sont cocycliques. En d'autres termes, P se situe sur le cercle circonscrit ω du triangle BCI .



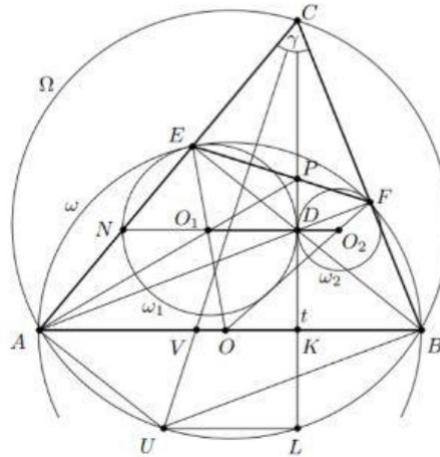
Soit Ω le cercle circonscrit du triangle ABC . C'est un fait bien connu que le centre de ω est le point médian M de l'arc BC de Ω . C'est aussi le point où la bissectrice AI coupe Ω . À partir du triangle APM , nous avons

$$AP + PM \geq AM = AI + IM = AI + PM$$

Par conséquent $AP \geq AI$. L'égalité est valable si et seulement si P se trouve sur le segment de droite AI , ce qui se produit si et seulement si $P = I$.

G.2 Solution 1. Le point E est le centre d'une homothétie h qui transforme le cercle ω_1 au cercle ω . Les rayons O_1D et OB de ces cercles sont parallèles car tous les deux sont perpendiculaires à la ligne t . Aussi, O_1D et OB sont du même côté de la ligne EO , donc h transforme O_1D en OB . Par conséquent, les points E, D et B sont colinéaires. De même, les points F, D et A sont également colinéaires.

Les droites AE et BF se croisent en C . Puisque AF et BE sont des hauteurs dans le triangle ABC , leur point commun D est l'orthocentre de ce triangle. Donc CD est perpendiculaire à AB , ce qui implique que C se trouve sur la ligne t . Notons que le triangle ABC possède des angles aigus. Nous mentionnons le fait bien connu que les triangles FEC et ABC sont similaires de rapport $\cos \gamma$, où $\gamma = \widehat{ACB}$. De plus, les points C, E, D et F se trouvent sur le cercle de diamètre CD .



Soit P le point commun des droites EF et t . Nous allons prouver que P se trouve sur la ligne AO_1 . Notons N le deuxième point commun du cercle ω_1 et AC ; c'est le point de ω_1 diamétralement opposé à D . D'après le théorème de Ménélaüs pour le triangle DCN , les points A, O_1 et P sont colinéaires si et seulement si

$$\frac{CA}{AN} \cdot \frac{NO_1}{O_1D} \cdot \frac{DP}{PC} = 1$$

Parce que $NO_1 = O_1D$, cela se réduit à $CA/AN = CP/PD$. Donc la ligne t rencontre AB en K . Alors $CA/AN = CK/KD$, il suffit donc de montrer que

$$\frac{CP}{PD} = \frac{CK}{KD} \tag{16}$$

Pour vérifier (16), considérons le cercle circonscrit Ω du triangle ABC . Dessinons son diamètre CU à C , et laissons CU rencontrer AB en V . Etendons CK pour rencontrer Cl en L . Puisque AB est parallèle à UL , nous avons $\widehat{ACU} = \widehat{BCL}$. D'autre part $\widehat{EFC} = \widehat{BAC}$, $\widehat{FEC} = \widehat{ABC}$ et $EF/AB = \cos \gamma$, comme indiqué ci-dessus. Ainsi, la réflexion dans la bissectrice de \widehat{ACB} suivie d'une homothétie de centre C et de rapport $1/\cos \gamma$ transforme le triangle FEC en ABC . Par conséquent, cette transformation prend CD vers CU , ce qui implique $CP/PD = CV/VU$. Ensuite, nous avons $KL = KD$, car D est l'orthocentre du triangle ABC . D'où $CK/KD = CK/KL$. Enfin, $CV/VU = CK/KL$ car AB est parallèle à UL . La relation (16) suit, prouvant que P se

trouve sur la ligne AO_1 . Par symétrie, P se trouve également sur la ligne AO_2 qui complète la solution.

Solution 2. Nous procédons comme dans la première solution pour définir un triangle ABC d'orthocentre D , dans lequel AF et BE sont des hauteurs.

Notons M le milieu du CD . Le quadrilatère $CEDF$ est inscrit dans un cercle de centre M , d'où $MC = ME = MD = MF$.

C.1 Pour chaque k , notons t_k l'entier unique tel que $2^{t_k-1} < k+1 \leq 2^{t_k}$. Nous montrons qu'un (n, k) -tournoi existe si et seulement si 2^{t_k} divise n .

Premièrement, nous prouvons que si $n = 2^t$ pour un certain t alors il existe un (n, k) -tournoi pour tout $k < 2^t - 1$. Soit S l'ensemble des séquences 0-1 de longueur t . Nous étiquetons les joueurs 2^t avec les éléments de S de manière arbitraire (ce qui est possible car il y a exactement 2^t séquences dans S). Les joueurs sont identifiés avec leurs étiquettes dans la construction ci-dessous. Si $\alpha, \beta \in S$, soit $\alpha + \beta \in S$ le résultat de l'addition modulo 2 terme par terme de α et β (avec les règles $0+0=0$, $0+1=1+0=1$, $1+1=0$). Pour chaque $i = 1, \dots, 2^t - 1$ soit $\omega(i) \in S$ la séquence de chiffres en base 2 de i , complétée par des zéros non significatifs si nécessaire pour atteindre la longueur t .

Définissons maintenant un tournoi avec $n = 2^t$ joueurs en $k \leq 2^t - 1$ tours comme suit : Pour tout $i = 1, \dots, k$ laissons le joueur α rencontrer le joueur $\alpha + \omega(i)$ au tour i . Le tournoi est bien défini comme $\alpha + \omega(i) \in S$ et $\alpha + \omega(i) = \beta + \omega(i)$ implique $\alpha = \beta$; aussi $[\alpha + \omega(i)] + \omega(i) = \alpha$ pour chaque $\alpha \in S$ (ce qui signifie que le joueur $\alpha + \omega(i)$ rencontre le joueur α au tour i , si nécessaire). Chaque joueur joue à chaque tour. Ensuite, chaque deux joueurs se rencontrent au plus une fois (exactement une fois si $k = 2^t - 1$), puisque $\omega(i) \neq \omega(j)$ si $i \neq j$. Ainsi la condition (i) est vraie, et la condition (ii) est également facile à vérifier.

Si le joueur α rencontre le joueur β au tour i , le joueur γ rencontre le joueur δ au tour i et le joueur α rencontre le joueur γ au tour j . Par suite $\beta = \alpha + \omega(i)$, et $\gamma = \alpha + \omega(j)$. Par définition, β jouera au tour j avec

$$\beta + \omega(j) = [\alpha + \omega(i)] + \omega(j) = [\alpha + \omega(j)] + \omega(i) = \gamma + \omega(i) = \delta$$

comme requis par (ii).

Il existe donc un (n, k) -tournoi pour les paires (n, k) tel que $n = 2^t$ et $k \leq 2^t - 1$. La même conclusion est simple pour n de la forme $n = 2^t s$ et $k \leq 2^t - 1$. En effet, considérons s différents $(2^t, k)$ -tournois T_1, \dots, T_s , aucun d'entre eux n'ayant des joueurs en commun. Leur union peut être considérée comme un $(2^t s, k)$ -tournoi T où chaque tour est l'union des tours respectifs dans T_1, \dots, T_s .

En résumé, la condition que 2^{t_k} divise n est suffisante pour qu'un (n, k) -tournoi existe. Nous prouvons que c'est également une condition nécessaire.

Considérons un (n, k) -tournoi arbitraire. Représentons chaque joueur par un point et après chaque tour, rejoignons par un segment tous les deux joueurs qui ont joué dans ce tour. Ainsi à un tour $i = 1, \dots, k$ correspond un graphe G_i . On dit que le joueur Q est un i -voisin du joueur P s'il y a un chemin d'arêtes dans G_i de P à Q ; en d'autres termes, s'il y a des joueurs $P = X_1, X_2, \dots, X_m = Q$ tel que le joueur X_j rencontre le joueur X_{j+1} dans l'un des premiers tours i ,

$j = 1, 2, \dots, m - 1$. L'ensemble des i -voisins d'un joueur sera appelé son i -composant. Il est clair que deux i -composants sont disjoints ou coïncident.

Par conséquent, après chaque tour i , l'ensemble des joueurs est partitionné en i -composants disjoints par paires. Donc, pour atteindre notre objectif, il suffit de montrer que toutes les k -composantes ont une taille divisible par 2^{t_k} .

À cette fin, voyons comment le i -composant Γ d'un joueur A change après le tour $i + 1$. Supposons que A rencontre le joueur B avec i -composant Δ au tour $i + 1$ (les composants Γ et Δ ne sont pas nécessairement distincts). Nous affirmons qu'au tour $i + 1$, chaque joueur de Γ rencontre un joueur de Δ , et vice versa.

En effet, soit C n'importe quel joueur de Γ , Et que C rencontre D au tour $i + 1$. Puisque C est un i -voisin de A , il y a une séquence de joueurs $A = X_1, X_2, \dots, X_m = C$, Telle que X_j rencontre X_{j+1} dans l'un des i premiers tours, $j = 1, 2, \dots, m - 1$. Soit X_j rencontrer Y_j au tour $i + 1$, pour $j = 1, 2, \dots, m$; en particulier $Y_1 = B$ et $Y_m = D$. Les joueurs Y_j existent au vu de la condition (i). Supposons que X_j et X_{j+1} se rencontrent au tour r , où $r \leq i$. Alors la condition (ii) implique que Y_j et Y_{j+1} se sont rencontrés au tour r , aussi donc $B = Y_1, Y_2, \dots, Y_m = D$ est un chemin dans G_i de B à D . C'est-à-dire que D est dans le i -composant Δ de B , comme revendiqué. Par symétrie, chaque joueur de Δ rencontre un joueur de Γ . au tour $i + 1$. Il s'ensuit notamment que Γ et Δ ont le même cardinal.

Il est clair maintenant que le $(i + 1)$ -composant de A est $\Gamma \cup \Delta$, l'union de deux ensembles de même taille. Puisque Γ et Δ , sont soit disjoints soit coïncident, nous avons soit $|\Gamma \cup \Delta| = 2|\Gamma|$, soit $|\Gamma \cup \Delta| = |\Gamma|$, comme d'habitude, $|\dots|$ désigne le cardinal d'un ensemble fini.

Soit $\Gamma_1, \dots, \Gamma_k$ les composantes consécutives d'un joueur donné A . Nous avons obtenu que soit $|\Gamma_{i+1} \cup \Delta| = 2|\Gamma_i|$ ou $|\Gamma_{i+1} \cup \Delta| = |\Gamma_i|$ pour $i = 1, \dots, k - 1$. Parce que $|\Gamma_1| = 2$, chaque $|\Gamma_i|$ est une puissance de 2, $i = 1, \dots, k - 1$. En particulier $|\Gamma_k| = 2^u$ pour certains u .

D'autre part, le joueur A a joué avec k adversaires différents par (i). Tous appartiennent à Γ_k donc $|\Gamma_k| \geq k + 1$. Donc $2^u \geq k + 1$, et puisque t_k est le plus petit entier satisfaisant $2^{t_k} \geq k + 1$, nous concluons que $u \geq t_k$. Ainsi, la taille de chaque k -composant est divisible par 2^{t_k} , ce qui complète la solution.

C.2 Pour chaque polygone convexe P dont les sommets sont dans S , soit $c(P)$ le nombre de points de S qui sont à l'intérieur de P , de sorte que $a(P) + b(P) + c(P) = n$, le nombre total de points dans S . En notant $1 - x$ par y ,

$$\sum_P x^{a(P)} y^{b(P)} = \sum_P x^{a(P)} y^{b(P)} (x + y)^{c(P)} = \sum_P \sum_{i=0}^{c(P)} \binom{c(P)}{i} x^{a(P)+i} y^{b(P)+c(P)-i}$$

Voir cette expression comme un polynôme homogène de degré n en deux variables indépendantes x, y . Dans la forme développée, c'est la somme des termes $x^r y^{n-r}$ ($0 < r < n$) multipliée par quelques coefficients entiers non négatifs.

Pour un r fixe, le coefficient de $x^r y^{n-r}$ représente le nombre de façons de choisir un polygone convexe P puis de choisir certains des points de S à l'intérieur de P de sorte que le nombre de sommets de P et le nombre de points choisis à l'intérieur de P s'additionnent conjointement à r . Cela correspond à choisir simplement un sous-ensemble d'éléments r de S .

La correspondance est bijective car chaque ensemble T de points de S se divise exactement d'une seule manière en l'union de deux sous-ensembles disjoints, dont le premier est l'ensemble des sommets d'un convexe polygone - à savoir, la coque convexe de T - et le second se compose de quelques points à l'intérieur de ce polygone. Le coefficient $x^r y^{n-r}$ est donc égal à $\binom{n}{r}$. Le résultat souhaité suit :

$$\sum_P x^{a(P)} y^{b(P)} = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} x^r y^{n-r} = (x+y)^n = 1$$

N.1 On va prouver par récurrence sur d que, pour tout entier positif N , il existe des entiers positifs b_0, b_1, \dots, b_{d-1} tels que, pour chaque $i = 0, 1, 2, \dots, d-1$, on a $b_i > N$ et

$$2^{b_i} + b_i \equiv i \pmod{d}$$

Cela donne le résultat pour $m = b_0$. Le cas de base $d = 1$ est trivial. Prenons un $a > 1$ et supposons que l'instruction est valable pour tout $d < a$. Notons que les restes de 2^i modulo a se répètent périodiquement en commençant par un certain exposant M . Soit k la longueur de la période; cela signifie que $2^{M+k'} \equiv 2^M \pmod{a}$ n'est valable que pour les k' qui sont des multiples de k . Notons en outre que la période ne peut pas contenir tous les a restants, car 0 manque ou il est le seul nombre de la période. Ainsi $k < a$. Soit $d = \text{pgcd}(a, k)$ et soit $a' = a/d$, $k' = k/d$. Puisque $0 < k < a$, nous avons également $0 < d < a$. Par l'hypothèse de la récurrence, il existe des entiers positifs b_0, b_1, \dots, b_{d-1} tels que $b_i > \max(2^M, N)$ et

$$2^{b_i} + b_i \equiv i \pmod{d} \text{ pour } i = 0, 1, \dots, d-1 \tag{17}$$

Pour chaque $i = 0, 1, \dots, d-1$ considérons la séquence

$$2^{b_i} + b_i, 2^{b_i+k} + (b_i+k), \dots, 2^{b_i+(a'-1)k} + (b_i+(a'-1)k) \tag{18}$$

Modulo a , ces nombres sont congruents à

$$2^{b_i} + b_i, 2^{b_i} + (b_i+k), \dots, 2^{b_i} + (b_i+(a'-1)k)$$

respectivement. Les d séquences contiennent au total $a'd = a$ nombres. Nous allons maintenant prouver qu'aucun de ces nombres n'est congru à un autre modulo a . Supposons que

$$2^{b_i} + (b_i + mk) \equiv 2^{b_j} + (b_j + nk) \pmod{a} \tag{19}$$

pour certaines valeurs de $i, j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ et $m, n \in \{0, 1, \dots, a'-1\}$. Puisque d est un diviseur de a , nous avons aussi

$$2^{b_i} + (b_i + mk) \equiv 2^{b_j} + (b_j + nk) \pmod{d}$$

Parce que d est un diviseur de k et compte tenu de (17), on obtient $i \equiv j \pmod{d}$. Comme $i, j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, cela signifie simplement que $i = j$.

En le substituant à (19), on obtient $mk \equiv nk \pmod{a}$ Donc $mk' \equiv nk' \pmod{a}'$; et comme a' et k' sont premiers, alors $m \equiv n \pmod{a}'$. D'où $m = n$.

Il s'ensuit que les nombres a qui composent les séquences (18) satisfont à toutes les conditions; ils sont certainement tous supérieurs à N car nous avons choisi chaque $b_i > \max(2^M, N)$. Donc la déclaration est valable pour a , complétant la récurrence.

N.2 L'équation n'a pas des solutions entières. Pour le montrer, nous prouvons d'abord un lemme.

Lemme. Si x est un entier et p est un diviseur premier de $\frac{x^7 - 1}{x - 1}$ alors $p \equiv 1 \pmod{7}$ ou $p = 7$.

Preuve. Les deux $x^7 - 1$ et $x^{p-1} - 1$ sont divisibles par p , par hypothèse et par le petit théorème de Fermat, respectivement. Supposons que 7 ne divise pas $p - 1$. Alors $\text{pgcd}(p - 1, 7) = 1$, il existe donc des entiers k et m tels que $7k + (p - 1)m = 1$. On a donc

$$x \equiv x^{7k+(p-1)m} \equiv (x^7)^k \cdot (x^{p-1})^m \equiv 1 \pmod{p}$$

et donc $\frac{x^7 - 1}{x - 1} = 1 + x + \dots + x^6 \equiv 7 \pmod{p}$

Il s'ensuit que p divise 7, donc $p = 7$ doit être vrai si $p \equiv 1 \pmod{7}$ ne l'est pas. (Fin de la preuve).

Le lemme montre que chaque diviseur positif d de $\frac{x^7 - 1}{x - 1}$ satisfait $d \equiv 0 \pmod{7}$ ou $d \equiv 1 \pmod{7}$.

Supposons maintenant que (x, y) est une solution entière de l'équation d'origine. Notons que $y - 1 > 0$, parce que $\frac{x^7 - 1}{x - 1} > 0$ pour tout $x \neq 1$. Puisque $y - 1$ divise $\frac{x^7 - 1}{x - 1} = y^5 - 1$, nous avons $y \equiv 1 \pmod{7}$ ou $y \equiv 2 \pmod{7}$ par ce qui précède. Dans le premier cas, $1 + y + y^2 + y^3 + y^4 \equiv 5 \pmod{7}$, et dans le second $1 + y + y^2 + y^3 + y^4 \equiv 3 \pmod{7}$. Les deux possibilités contredisent le fait que le diviseur positif $1 + y + y^2 + y^3 + y^4$ de $\frac{x^7 - 1}{x - 1}$ est congru à 0 ou 1 modulo 7. Ainsi, l'équation donnée n'a pas de solution entière.



RESTEZ CONNECTÉS AVEC MATH&MAROC

