Vol. 1, No. 4, 2017, pp. 1–6

Math&Maroc est une revue mathématique publiée par l'association du même nom. Elle propose des cours et des problèmes à résoudre de niveau secondaire.
Nous vous invitons à nous envoyer tous vos commentaires, remarques et suggestions en nous contactant à l'adresse redac.mathetmaroc@gmail.com.
Nous sommes aussi intéressés par de nouveaux problèmes. Tout problème proposé devrait s'accompagner d'une solution, ou au moins d'informations suffisantes pour indiquer qu'une solution est possible. Veuillez inclure toute référence ou réflexion qui pourrait aider les rédacteurs et rédactrices. Nous vous invitons particulièrement à envoyer des problèmes originaux. Toutefois, tout problème intéressant quoique non original est le bienvenu pour autant qu'il soit accompagné des références nécessaires. Dans ce cas-là, il faut obtenir la permission de l'auteur avant de publier le problème.
Le journal est aussi ouvert à de nouveaux articles ou de nouveaux cours. Les articles devraient être soigneusement rédigés et raisonnablement courts. Ils devraient être d'un niveau accessible à des élèves de collège ou de lycée.
N'hésitez pas à nous contacter pour toute information complémentaire.

Sommaire

Éditorial

Venant avec le couronnement du mathématicien tunisien Nader Masmoudi, premier et seul médaillé d'or aux OIM dans le monde arabe et africain, par la SMF récemment, ce numéro coïncide également avec la fin du stage olympique de Novembre, qui a été une réussite. Stage qui a vu la participation, entre autres, du mathématicien russe A. V. Akopyan et de Abdellah Aznag, membre de l'équipe OIM 2015, équipe qu'on retrouvera au coin des anciens de ce numéro, avec Ali Baouan, le plus jeune ancien jusque là. Le portrait d'un mathématicien vous présentera cette fois un scientifique de l'âge d'or islamique : Al Kashi, et la section « Beauté des mathématiques » parlera de géométrie. La géométrie élémentaire qu'on retrouvera, avec les polynômes, également dans les cours de ce numéro. Et bien sûr des exercices pour garder la continuité de la formation olympique. Bonne lecture !

Mouad Moutaouakil

Portrait d'un mathématicien : Al Kashi

Mouad Moutaoukil Al-Kashi, surnommé *Ghyath-al-din* (l'Auxiliaire de la Foi), est l'un des derniers grands mathématiciens de l'Âge d'or islamique et du monde musulman en général. Il est connu pour ses contributions en astronomie et en mathématiques. Il est né en 1380 à la ville à laquelle il doit son nom : Kashan en Iran; il est mort en 1430 à Samarcande (actuel Ouzbékistan).

Sa vie

Al-Kashi grandit dans la pauvreté durant une période trouble où la Perse subit les conquêtes militaires de l'émir Tîmur Lang, dit *Tamerlan* (1370-1405). C'est là, malgré les conditions difficiles, qu'il fait ses premières observations astronomiques dont la plus importante est une éclipse de lune qui eut lieu le 2 juin 1406.

Après la mort de Tamerlan, les conditions s'améliorent grandement. Son fils et successeur, *Shahrokh* (1377-1447) soutient fortement les intérêts artistiques et intellectuels. Al-Kashi se consacre alors pleinement aux mathématiques et à l'astronomie, surtout après son invitation à Samarcande, vers 1420, par *Ulugh-Beg* (1394-1449), fils de Shahrokh et gouverneur de Samarcande, qui a fondé une Université comprenant une soixantaine de scientifiques qui étudient

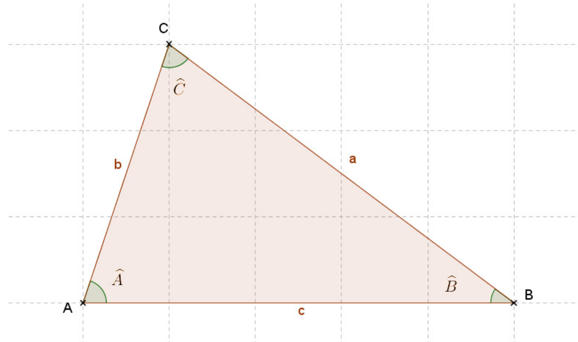


Figure 1. La fameuse *loi des cosinus* ou théorème d'al-Kashi.

la théologie et les sciences. Il retrouve là Quadi-Zadé Roumi (1364-1436), une autre grande figure de l'Âge d'or islamique et également astronome et mathématicien, avec qui il entame une collaboration qui durera jusque sa mort.

De nombreux ouvrages d'al-Kashi ainsi que certaines lettres écrites à son père, demeuré à Kashan, ont survécu. De ce fait, les détails de ses travaux sont connus et souvent datés.

Son oeuvre scientifique

L'œuvre d'al-Kashi a été particulièrement abondante en astronomie, qui a fait de lui un ingénieur : il a créé plusieurs instruments astronomiques ou donné la description pour les réaliser. Il ne pouvait évidemment pas se passer de trigonométrie à laquelle il a contribué avec quelques travaux, dont son fameux calcul de sin(1), grandement précis (10 places sexagésimales), qui a permis de déduire le reste de la table à l'aide des relations connues.

Il a aussi été le premier à franchir la barre symbolique des 10 décimales en ce qui concerne le calcul de π ; dans son *Traité sur le cercle* (1424), al-Kashi calcule le rapport de la circonférence à son rayon pour obtenir une valeur approchée de 2π avec une précision jamais atteinte. Il obtient 9 positions exactes en base 60 soit 16 décimales exactes.

Par ailleurs, on connaît tous le nom d'al-Kashi à travers son théorème qui généralise le théorème de Pythagore pour un triangle quelconque et qui s'exprime aujourd'hui de la façon suivante :

Dans un triangle ABC de côtés de longueurs a, b et c, $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$.

Al-Kashi est mort en 1430 (ou 1429), nous laissant un imposant héritage d'écrits scientifiques,

FIGURE 2. Un timbre iranien à l'effigie d'AL-KASHI.

dont le plus important, *Miftah al-Hisab* (traduisible par "La Clé de l'arithmétique", 1427) a été un mélange des idées de ses prédécesseurs et d'innovations personnelles ; il contient de l'Algèbre, de la Géométrie, entremêlées de nombreuses formules pour le calcul numérique : aires, volumes, racines n-èmes, calcul des éléments d'un triangle... Tout cela a fait qu'AL-KASHI a atteint une immense renommée. Il sera alors l'un des derniers grands mathématiciens du Moyen-Orient à entrer dans l'Histoire avant que le flambeau ne soit transmis au monde occidental.

Le coin des anciens : Ali Baouan

Dans ce numéro, c'est Ali Baouan, participant aux Olympiades Internationales de Mathématiques en 2015 et lauréat au concours général de mathématiques, qui partage avec nous son expérience.

Cela fait déjà 2 ans que je suis parti aux IMOs, et en écrivant ce témoignage, je le revis comme si c'était hier. Alors comment tout a commencé ? Comme tout le monde au collège, je ne bossais pas. Je jouais beaucoup au football et j'avais une passion particulière pour la physique. J'avais aussi un trait de caractère assez particulier : je ne supportais pas le fait de bloquer sur un exercice, si la question a été donnée c'est que je suis en mesure d'y répondre. Forcément, il y'a eu un moment où les exercices présentés en classe ne me stimulaient pas assez et je devais alors me réfugier dans mes «science&vie ». Entre-temps, Ma sœur, alors en classe MP* à Moulay Youssef, me parlait parfois de certains de ses camarades de classe. Ils avaient participé aux olympiades internationales et abordaient les mathématiques de prépa avec beaucoup de facilité, réputées si ardues. J'étais souvent ébahi, les olympiades internationales me paraissaient à l'époque tellement inaccessibles ! Il fallait sûrement être un génie pour y participer ! Pourquoi pas moi ? J'étais doué mais pas exceptionnel, il fallait donc tester. J'attendais donc avec impatience les olympiades régionales, je voulais relever me défi ! L'attente fut couronnée par une désillusion totale : après le premier test, je ne fus même pas sélectionné pour représenter mon lycée aux épreuves régionales. Cet échec fut difficile, mais nécessaire. Il fallait se relever, attendre et puis surtout, s'entraîner. La prochaine fois je n'allais pas essayer, j'allais réussir.

Premières préparations

J'étais désormais au lycée, le programme était assez 'light' et j'avais donc le temps de découvrir un forum qui a fait de moi ce que je suis à présent. Le 25/12/2012, je m'inscris sur mathsmaroc.jeun.fr et cette fois, j'étais servi. J'y retrouvai une dizaine de jeunes lycéens tous férus de maths qui partageaient et résolvaient des problèmes difficiles. Ainsi, C'était sur cette plateforme que ma passion pour les maths s'est développée et je resterai toujours reconnaissant à Mathmaroc. J'appréciais particulièrement les inégalités et l'arithmétique et il m'arrivait souvent de taper tout bêtement « théorèmes sur les inégalités » sur Google par curiosité. Forcément, je devenais de plus en plus fort et sur les tests régionaux en Tronc Commun je finissais très rapidement. Les épreuves n'étaient pas assez difficiles ; les IMOs, eux, me résistaient toujours. Je n'étais donc pas assez prêt ; non seulement fallait-il être doué pour réussir, mais il fallait connaitre et maitriser une armada de résultats et de théorèmes. C'était tout un programme supplémentaire à apprendre, et les ressources étaient illimitées. Grâce à Mathmaroc, je m'étais déjà lancé dans l'aventure. Je me rappelle encore de mes premiers IMO réussis : Le P2 de l'IMO 2000 et le P5 de l'IMO 2012. C'était des inégalités, bien évidemment. Elles n'étaient pas très difficiles mais c'était en franchissant ce palier que j'ai acquis ma confiance en moi que je garde encore : Quelque soit la difficulté, je peux la dépasser. Les sélections régionales et nationales pendant la première année bac se passèrent assez sereinement. C'était un test de quatre exercices en 3 heures les vendredis après-midi au lycée Ibn Rochd. Parfois mon lycée n'était même pas prévenu et il fallait que je cherche l'information moi-même, comme quoi aller aux Olympiades requiert d'être toujours à jour. J'étais investi corps et âme pour réaliser mon ambition. Dans une des épreuves d'ailleurs, les lumières de la salle furent coupées et j'ai dû utiliser la faible lumière de mon écran de téléphone pour finir. Cette fois, j'étais très bien préparé et confiant. Ainsi, Je fus, sans surprise, choisi parmi les 40 élèves sélectionnés pour participer au premier des cinq stages.

Les stages olympiques

Les stages olympiques furent l'une des plus agréables expériences de ma vie. Sketshup, elidrissi, LWP . . . les pseudos Mathmaroc prirent vie, devenant des camarades. Ce n'était guère intimidant mais plutôt motivant, d'autant plus que le contact avec nos aînés en Terminale était encourageant. Il restait une année et quatre stages pour les IMOs et il fallait tout donner. On reconnaissait maintenant les axes de progression urgents : la géométrie et la combinatoire. Le groupe était soudé et chacun connaissait les forces et les lacunes des autres. En plus, les problèmes étaient de plus en plus passionnants, il fallait à présent donner aux moins 2 heures à un seul exercice pour trouver la faille, le déclic qui permettait de le résoudre. C'était surtout le cas avec la géométrie, qui me plaisait de plus en plus, surtout après ma découverte du monde fascinant de la géométrie projective. Le chemin vers les IMOs devenait ainsi de plus en plus clair et j'étais passé au forum AOPS pour m'entrainer exclusivement sur les shortlists. D'autre part, les quatre stages suivants ont rythmé mon année de Terminale, je ne préparais pas du tout le Bac : après tout, les mathématiques du baccalauréat devenaient triviales grâce aux olympiades. J'attendais donc à chaque fois le stage suivant pour tester mon niveau : Quatre stages qui furent quatre expériences enrichissantes humainement et académiquement. Parmi les moments les plus spéciaux durant cette expérience fut l'annonce de l'équipe IMO 2015 au terme du Team Selection Test. C'était un instant de jubilation extrême, et j'en garde encore une photo en souvenir. Moi et Abdollah Aznag, un autre participant, poussant un cri de victoire. J'avais réussi, ce que je m'étais promis d'accomplir quatre ans auparavant. Le seul objectif était maintenant de conquérir la Thaïlande ! Il ne restait que 3 mois et l'équipe avait beaucoup de potentiel, en plus d'être motivée.

Les IMOs

Je garde peu de souvenirs de l'IMO 2015, j'oublie souvent les moments les plus intenses de ma vie. Je sais en tout cas que le séjour était magnifique. On débarquait alors dans un hôtel à Chiang Mai, et là, tout autour, se trouvaient des centaines d'élèves de différentes cultures et pays tous avec le même talent pour les maths. Le voyage était long et éprouvant (presque 23h !) et il fallait se reposer. Le lendemain, c'était l'Opening Ceremony. Le jour d'après, le moment fatidique : le Day 1 de l'imo 2015. C'est ici que les souvenirs deviennent flous, je dormis très tard le jour de notre arrivée et je rate la première épreuve. C'était très frustrant, vu que je pouvais beaucoup mieux faire pour les deux premiers problèmes. J'étais contraint de vite me ressaisir pour la deuxième épreuve, après laquelle je ne suis pas vraiment frustré, mais légèrement déçu tout de même. On nous emmène directement en excursion après les épreuves, et qu'est ce que ça a fait du bien ! On découvre des coins très sympas et l'atmosphère tropicale est extrêmement agréable. Je regrette avoir visité des éléphants et des tigres dressés, l'expérience était intéressante mais pas autant après que je découvris le violent traitement que ces animaux subissaient, pour quelques photos vendues à une centaine de *Bahts*. Les résultats tombent après les excursions : Je finis avec 11 points et une mention honorable pour avoir fini le P4. Toute l'équipe avait raté son IMO, on méritait beaucoup mieux au vu de notre niveau mais il fallait s'y faire : on a échoué. On est quand même sorti la tête haute, grandis par l'expérience. Deux jours plus tard, on était revenu au Maroc. Tout était donc fini ? Que nenni, les olympiades ont changé toute ma vie ! Si aujourd'hui, j'ai intégré l'X, c'est en grande partie grâce aux olympiades. Si j'ai remporté le concours général des sciences et techniques, c'est grâce aux olympiades. Si j'ai eu autant de facilités dans ma scolarité, c'est grâce aux olympiades. Et si mes parents et ma sœur sont fiers de moi, c'est grâce aux olympiades. C'est précisément pour ça je rejoins Math&Maroc, il faut aider les prochaines générations. Donc à toi, jeune lycéen, qui hésite à te lancer. Si tu as peur de rater ton régional à cause des olympiades, ou si tu doutes de tes capacités, je te demanderai de baisser la tête (ou plutôt la relever), et de foncer. On ne peut que gagner avec les olympiades !

Vol. 1, No. 4, 2017, pp. 7–10

Les polynômes : notions élémentaires

Omar Mouchtaki

1. Définitions et propriétés élémentaires

La définition rigoureuse de ce qu'est un polynôme ne sera pas traitée ici. Nous nous arrêterons sur l'idée intuitive selon laquelle un polynôme s'écrit sous la forme :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_0, \quad a_n \neq 0$$

Un peu de terminologie.

Définition 1.1. Dans l'exemple ci-dessus, n est le degré du polynôme qu'on note $\deg(P)$, les a_i sont les coefficients du polynôme. Ils peuvent appartenir à $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Z}$ par exemple.
On note $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers.
On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

Notons que l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ (où on peut remplacer $\mathbb{K}$ par n'importe quel ensemble usuel), est stable par addition, multiplication, soustraction.
Dans la suite du cours on ne traitera que des cas où $\mathbb{K}$ est $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$.

Définition 1.2. 1. On appelle monôme un polynôme de la forme $a_i X^i$.
2. On appelle coefficient dominant d'un polynôme de degré n le coefficient a_n.
3. On appelle polynôme unitaire un polynôme dont le coefficient dominant vaut 1.

La suite des coefficients d'un polynôme détermine entièrement le polynôme. Ceci nous permet d'énoncer le principe d'identification entre polynômes.

Théorème 1.3. *Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = a_n X^n + \ldots + a_0$. Alors si $P = 0$, on a que pour tout i, $a_i = 0$.*
Soit Q un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ tel que $Q(X) = b_m X^m + \ldots + b_0$ avec $b_m \neq 0$. Alors si $P = Q$ et $a_n \neq 0$, on a que $n = m$ et pour tout i, $a_i = b_i$.

Voici des propositions intéressantes sur les degrés des polynômes. Les démonstrations sont laissées au lecteur.

Proposition 1.4. *Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$.*

1. $deg(P+Q) \leq \max(deg(P), deg(Q))$
2. $deg(PQ) = deg(P) + deg(Q)$
3. $deg(P') = deg(P) - 1$ *où P' est la dérivée de P.*

Remarque 1. Par convention, le polynôme nul est de degré $-\infty$.

Exemple 1. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(2X) = P'(X)P''(X)$.

La première chose que nous aimerions faire est connaître les degrés possibles pour nos polynômes. Notons n le degré de P et supposons que P n'est pas le polynôme nul (qui est clairement solution de l'équation fonctionnelle). Par conséquent, P' et P'' ne peuvent pas être égaux au polynôme nul. On a alors que $n = (n-1) + (n-2)$ d'après les propriétés énoncées sur les degrés. Par conséquent, $n = 3$.

Soient a, b, c et d des réels ; nous pouvons alors écrire $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ donc $P'(X) = 3aX^2 + 2bX + c$ et $P''(X) = 6aX + 2b$. La relation $P(2X) - P'(X)P''(X) = 0$ devient après calculs $2a(4-9a)X^3 + 2b(2-9a)X^2 + (2c(1-3a) - 4b^2)X + d - 2cb = 0$. L'identification nous donne alors un système d'équations à partir duquel nous obtenons $a = \dfrac{4}{9}$ et $b = c = d = 0$.

Par conséquent, les seules solutions possibles sont $P = 0$ ou $P = \dfrac{4}{9}X^3$. Nous vérifions réciproquement que ces deux solutions conviennent.

Enfin, terminons cette partie par une parenthèse dans l'arithmétique des polynômes. Nous verrons plus en détail dans un autre cours que l'ensemble des polynômes possède également une arithmétique ressemblant beaucoup à celle des entiers.

Théorème 1.5. *Soient A et B appartenant à $\mathbb{K}[X]$. Il existe un unique couple de polynômes Q et R de $\mathbb{K}[X]$ vérifiant que $deg(R) < deg(B)$ et*

$$A = QB + R.$$

En pratique, la division euclidienne se fait comme pour les entiers. On dispose de A et B écrits dans l'ordre du monôme de plus haut degré à celui de plus bas degré. On cherche le monôme aX^k tel que aX^kB ait le même monôme dominant que B. Puis on recommence l'algorithme en considérant $A - aX^kB$. L'algorithme s'arrête alors lorsqu'il ne reste qu'un polynôme de degré strictement plus petit que le degré de B.

Exemple 2. Faisons la division euclidienne de $X^7 - 1$ par $X^3 + X + 1$. On obtient

$$X^7 - 1 = (X^3 + X + 1)(X^4 - X^2 - X + 1) + 2X^2 - 2$$

Exemple 3. Trouver le reste de la division euclidienne de $A(X) = X^{100} - 2X^{51} + 1$ par $B(X) = X^2 - 1$.

D'après le théorème de division euclidienne on sait qu'il existe Q et R dans $\mathbb{R}[X]$ tels que $A(X) = Q(X)B(X) + R(X)$ avec $\deg(R) \leq 1$. Donc on peut écrire $R(X) = aX + b$ où a et b sont des réels. Par ailleurs, $B(1) = B(-1) = 0$. On obtient donc le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} A(1) = R(1) \\ A(-1) = R(-1) \end{cases}$$

ce qui revient à

$$\begin{cases} 0 = a + b \\ 4 = a - b \end{cases}$$

Alors $a = 2$ et $b = -2$. Donc $R(X) = 2X - 2$.

2. Racines d'un polynôme

La notion de racines est connue de tous puisqu'un des cours principaux du lycée consiste à trouver les racines des polynômes de degré 2. Nous allons néanmoins la rappeler.

Définition 2.1. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est racine d'un polynôme P si $P(\alpha) = 0$.

Théorème 2.2. *Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de P. Alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que*

$$P(X) = (X - \alpha)Q(X)$$

Démonstration. On fait la division euclidienne de P par $X - \alpha$. On sait donc qu'il existe Q et R appartenant à $\mathbb{K}[X]$ tels que $deg(R) < deg(X - \alpha)$ et $P(X) = Q(X)(X - \alpha) + R(X)$.

On sait que R est un polynôme constant puisqu'il est de degré strictement inférieur à 1.

Puis en évaluant l'équation en α, nous obtenons que $P(\alpha) = Q(\alpha)(\alpha - \alpha) + R(\alpha)$. Donc $R(\alpha) = 0$ et donc R est le polynôme nul. □

Remarque 2. L'égalité des degrés entre $P(X)$ et $Q(X)(X - \alpha)$ nous permet d'assurer que $deg(Q) = deg(P) - 1$

La notion de racine n'est pas suffisante pour décrire complètement les zéros d'un polynôme. En effet, dans certaines équations de degré 2, il nous arrive de parler de racine double. En réalité, ce concept peut être généralisé. C'est ce que nous allons faire à travers la définition suivante.

Définition 2.3. On appelle multiplicité d'une racine α de P l'unique entier k tel qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant

$$P(X) = (X - \alpha)^k Q(X)$$

et $Q(\alpha) \neq 0$.

Il est important de mettre en parallèle la notion de multiplicité et celle de dérivation.

Théorème 2.4. *Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de P. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. α est de multiplicité k si et seulement si, pour tout i tel que $0 \leq i < k, P^{(i)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$. On a noté $P^{(i)}$ la dérivée i-ème de P.*

Maintenant que nous connaissons les principales définitions concernant les racines et leur multiplicité, nous pouvons énoncer une propriété des polynômes qui est souvent le point clé d'exercices les mettant en scène. Il s'agit de la propriété de **rigidité** des polynômes.

Théorème 2.5. *1. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ de degré inférieur ou égal à n. Alors, si P admet strictement plus de n racines (comptées avec multiplicités), P est le polynôme nul.*

2. Si deux polynômes P et Q de degré inférieur ou égal à n coïncident sur strictement plus de n valeurs alors ils sont égaux.

La démonstration du premier point se fait par récurrence et utilise des propriétés vues précédemment. Elle est laissée en exercice au lecteur. Le second point découle alors du premier point en considérant le polynôme $P - Q$ qui est également de degré au plus n.

Remarque 3. Un corollaire évident mais qu'il peut être intéressant de garder sous cette forme en tête est le fait que le seul polynôme ayant une infinité de racines est le polynôme nul.

Exemple 4. Déterminer tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$

Nous allons encore une fois chercher à trouver le degré de P pour commencer. Nous remarquons que le polynôme nul est clairement solution de l'équation. Supposons que P n'est pas nul et posons n le degré de P. Alors $2n = n + 2$ et donc $n = 2$.

Ici, l'identification n'est pas la méthode la plus simple pour trouver P. En effet, nous pouvons trouver facilement les racines de P. Nous avons que $P(\mathrm{i}^2) = (\mathrm{i}^2 + 1)P(\mathrm{i})$ donc $P(-1) = 0$. On évalue alors l'équation en -1 afin d'obtenir que $P(1) = 2P(-1) = 0$ Donc $P(1) = 0$. Comme P est de degré 2 nous savons que -1 et 1 sont les seuls racines de P. Par conséquent, $P = \lambda(X + 1)(X - 1)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

Réciproquement, posons $P = \lambda(X + 1)(X - 1)$. Par conséquent,

$$P(X^2) = \lambda(X^2 + 1)(X^2 - 1) = \lambda(X^2 + 1)(X - 1)(X + 1) = (X^2 + 1)P(X)$$

Ainsi, les solutions de cette équation s'écrivent sous la forme $P = \lambda(X + 1)(X - 1)$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$.

3. Exercices

Exercice 1. Soit $n \geq 2$, On pose :

$$P(X) = (n-1)X^{2n} - 2(2n-1)X^n + 2n^2X - (2n^2 - 3n + 1)$$

Montrer que 1 est une racine d'ordre 3 exactement.

Exercice 2. Déterminer tous les polynômes de P de $\mathbb{C}[X]$ tels que $P(0) = 0$ et $P(X^2+1) = P(X)^2 + 1$.

Exercice 3. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $16P(X^2) = P(2X)^2$

Exercice 4. Soit P une fonction polynomiale de degré au plus n avec $n \geq 2$ à coefficients réels. Montrer que le graphe de P ne peut pas contenir plus de $n+1$ points distincts alignés.

Exercice 5. Trouver toutes les fonctions polynomiales à coefficients réels qui sont périodiques.

Vol. 1, No. 4, 2017, pp. 11–17

Géométrie élémentaire

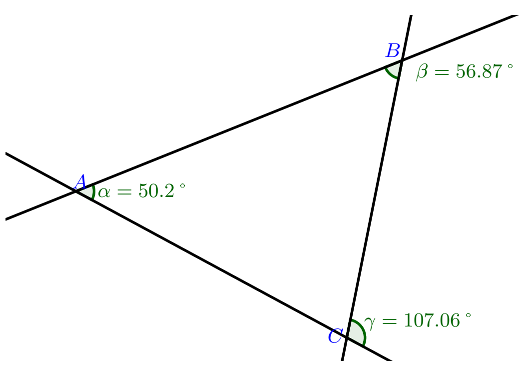
Antoine Taliercio

Dans cet article, nous présentons quelques éléments de géométrie élémentaire, notamment la technique de « chasse aux angles », le théorème de l'angle au centre et le théorème de l'angle inscrit. Avant cela, faisons un petit rappel de méthode. Pour résoudre un problème de géométrie, il ne faut pas hésiter à dessiner beaucoup de figures avant d'étudier le problème. Ne pas oublier non plus qu'une figure même très explicite ne constitue pas à elle seule une solution à un problème, il faut également rédiger une résolution explicite.

1. La technique de « chasse aux angles »

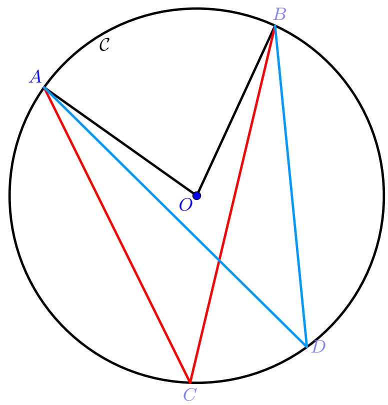
1.1. Idée générale

- Grâce à certains théorèmes, la méthode de chasse aux angles permet d'établir des résultats comme ceux que l'on verra plus tard, en propageant dans une figure des égalités entre les angles.
- Il faut avant tout se remémorer quelques résultats du collège qui doivent devenir des réflexes, comme remarquer les angles « alternes internes », ou savoir que la somme des angles d'un triangle fait 180°... Nous vous invitons donc à vous reporter au numéro de mai 2017, où vous trouverez un cours sur la géométrie du triangle.



- Par exemple dans la figure ci-dessus, l'angle γ vaut la somme de l'angle α et de l'angle β. En effet γ est le supplémentaire d'un angle qui est lui-même le supplémentaire d'un angle de valeur $\alpha + \beta$ (d'après la propriété sur la somme des angles d'un triangle)
- Le fait de pouvoir utiliser rapidement ce genre de propriétés, permet une visualisation plus facile dans un problème de géométrie élémentaire.

1.2. Le théorème de l'angle au centre et de l'angle inscrit

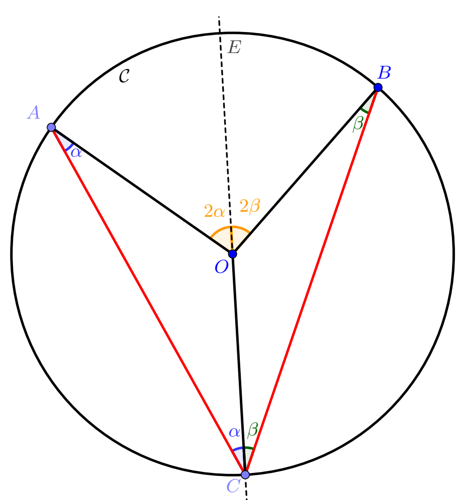


- $\widehat{\mathrm{AOB}}$ est l'angle *au centre* interceptant l'arc $\widehat{AB}$.
- $\widehat{\mathrm{ACB}}$ et $\widehat{\mathrm{ADB}}$ sont deux angles *inscrits*, qui interceptent l'arc $\widehat{AB}$.

Théorème 1.1 (angle au centre, rappel)**.** *On a que l'angle au centre est le double de l'angle inscrit interceptant le même arc et placé du même côté. Ainsi sur la figure ci-dessus, on a que*

$$\widehat{\mathrm{ACB}} = \widehat{\mathrm{ADB}} = \frac{\widehat{\mathrm{AOB}}}{2}$$

Démonstration. On va utiliser le résultat rappelé précédemment en introduction, ce qui sera bien plus rapide que de faire appel à la somme des angles d'un triangle. On se reporte à la figure suivante. Le triangle OAC (resp. OBC) est isocèle en O. Donc on a l'égalité suivante : $\widehat{\mathrm{OAC}} = \widehat{\mathrm{OCA}}$ que l'on note α, (resp. $\widehat{\mathrm{OBC}} = \widehat{\mathrm{OCB}}$ que l'on note β). Ainsi l'angle $\widehat{\mathrm{AOE}}$ vaut 2α, et l'angle $\widehat{\mathrm{BOE}}$ vaut 2β, en vertu du résultat introductif. Enfin, on a bien que l'angle au centre, *i.e.* $\widehat{\mathrm{AOB}}$ vaut $2 \times (\alpha + \beta)$ et que l'angle inscrit *i.e.* $\widehat{\mathrm{ACB}}$ vaut $\alpha + \beta$, d'où le résultat voulu.

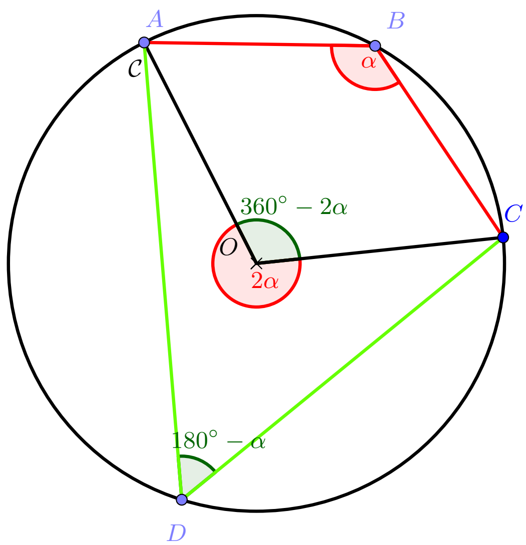


□

Définition 1.2. On dit que des points sont *cocycliques*, s'il existe un même cercle passant par chacun de ces points.

Remarque 1. – Par exemple trois points du plan non alignés sont toujours cocycliques, et *le* cercle qui passe par ces points est le cercle circonscrit au triangle ainsi formé.

– A quelles conditions quatre points sont-ils cocycliques ? On les suppose tous distincts deux à deux, et sans alignements. On remarque que pour appliquer le théorème de l'angle au centre on peut considérer l'angle inscrit de part et d'autre de l'arc intercepté. Autrement dit, dans la figure ci-dessus, on se place dans la situation où l'angle au centre est soit $\widehat{\mathrm{AOC}}$, soit $360° - \widehat{\mathrm{AOC}}$. Ainsi la somme des « deux angles inscrit », $\widehat{\mathrm{ADC}}$ et $\widehat{\mathrm{ABC}}$ vaut $180° - \alpha + \alpha = 180°$.



Cette dernière remarque montre en fait une *condition nécessaire* pour que quatre points soient cocycliques. On a en fait le théorème suivant :

Théorème 1.3 (angle inscrit)**.** *Soit $\mathcal{C}$ un cercle et trois points donnés sur ce cercle, A, B, C. Soit D un point du plan, alors :*

– *si D est du même côté que B du segment $[AC]$, et si $\widehat{\mathrm{ABC}} = \widehat{\mathrm{ADC}}$, alors A, B, C et D sont cocycliques.*
– *sinon, si $\widehat{\mathrm{ABC}} + \widehat{\mathrm{ADC}} = 180°$, alors A, B, C et D sont cocycliques.*

Démonstration (Idée). On suppose que l'hypothèse est vraie. Soit O le centre du cercle. On considère l'intersection entre la droite (OD) et le cercle $\mathcal{C}$, et on aboutit à une contradiction. □

1.3. Exercices

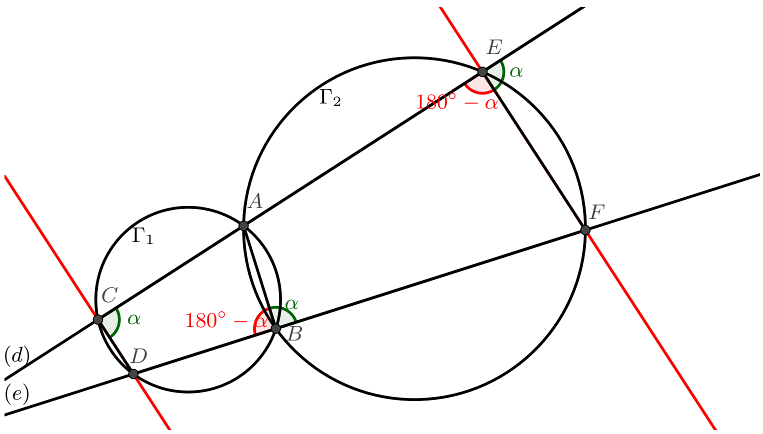
Exercice 1. Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles qui se coupent en deux points distincts A et B, Soient (d) et (e) deux droites qui passent respectivement par A et B, et telles que (d) coupe Γ_1 en un point C et Γ_2 en un point E, et (e) coupe Γ_1 en un point D et Γ_2 en un point F. Montrer que (CD) et (EF) sont parallèles.

Exercice 2 (Théorème de Miquel). Soit ABC un triangle. Soient D un point sur le segment $[BC]$, E un point sur $[AC]$ et F un point sur $[AB]$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AEF, BDF, et CDE se coupent en un point.

Exercice 3 (Théorème de la droite de Simson). Soit ABC un triangle et soit P un point du plan, on pose A', B', et C' respectivement les projetés orthogonaux de P sur $[BC]$, $[AC]$, et $[AB]$. Montrer que A', B', et C' sont alignés si et seulement si A, B, C et D sont cocycliques.

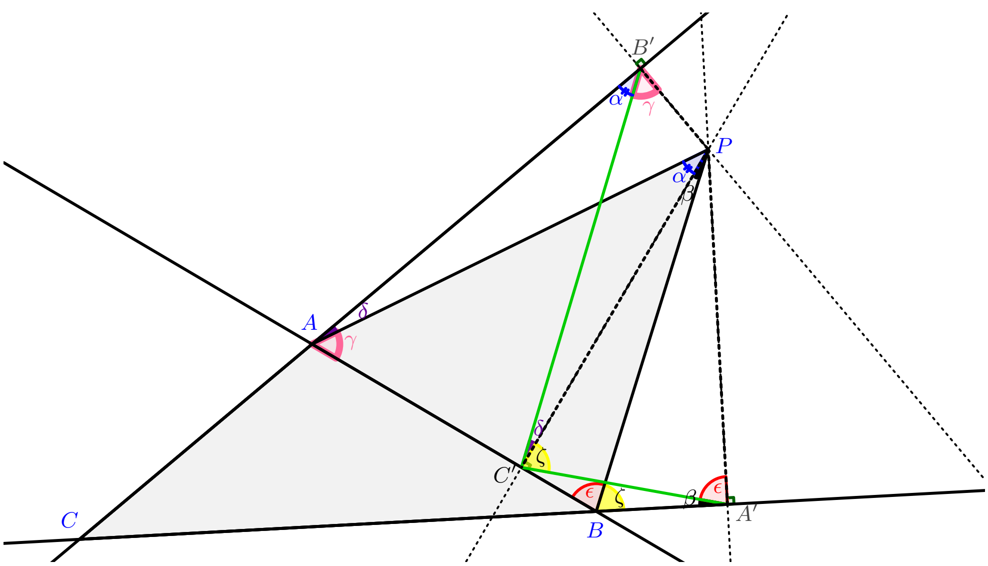
1.4. Solutions

Exercice 1 (Solution) : On pose $\alpha = \widehat{\mathrm{ACD}}$. Les points $ABCD$ étant cocycliques, on a $\widehat{\mathrm{ACD}} + \widehat{\mathrm{ABD}} = 180°$, donc le supplémentaire de $\widehat{\mathrm{ABD}}$ qui est $\widehat{\mathrm{ABF}}$ vaut α. De nouveau, par cocyclicité des points A, E, F, et B, on a que $\widehat{\mathrm{AEF}} = 180° - \alpha$. Finalement on a que les droite (CD), et (EF) sont coupées par la droite (CE) créant un même angle α aux deux intersections. Ainsi, (CD) et (EF) sont parallèles. □



Exercice 2 (Indication) : Il faut considérer G une intersection de deux des cercles circonscrits. On montre alors que G est bien sur le troisième cercle circonscrit □

Exercice 3 (Solution) :



Il faut remarquer que les points A, B', P et C' sont cocycliques, car on a deux angles droits opposés dans le quadrilatère $AB'PC'$, donc de somme $180°$. De même pour les points P, C', B, et A'. En imaginant les deux cercles appropriés, on obtient toutes les égalités entre angles deux à deux, que l'on a reportées sur la figure ci-dessus. De plus, on a toujours par le théorème de l'angle inscrit que A, B, C, et P sont cocycliques si et seulement si $\widehat{\mathrm{ACB}} + \widehat{\mathrm{APB}} = 180°$

Or, on a sans trop de peine que :

$$\widehat{\mathrm{ACB}} = \gamma + \delta + \epsilon + \zeta - 180^\circ \text{ et } \widehat{\mathrm{APB}} = \alpha + \beta$$

Donc A, B, C, et P sont cocycliques si et seulement si :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon + \zeta = 360^\circ$$

Or $\alpha + \gamma = 90^\circ$ et $\beta + \epsilon = 90^\circ$
Ainsi, la deuxième proposition revient à $\delta + \zeta = 180^\circ$, c'est-à-dire A', B', C' alignés, d'où l'équivalence voulue. □

2. Le problème de Fagnano

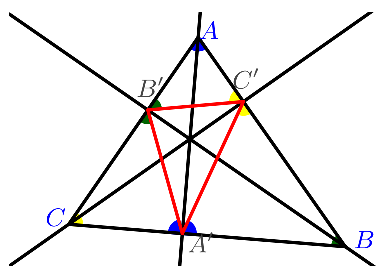
Le problème de Fagnano consiste à chercher, pour un triangle ABC donné, le triangle DEF inscrit dans ABC (c'est-à-dire tel que chaque segment $[AB]$, $[BC]$, ou $[AC]$ contienne un unique sommet D, E, ou F) de plus petit périmètre.

Définition 2.1 (Triangle orthique)**.** Soit ABC un triangle et soient A', B', C' les pieds de ses hauteurs issus respectivement de A, B et C. Le triangle $A'B'C'$ est appelé triangle orthique du triangle ABC.

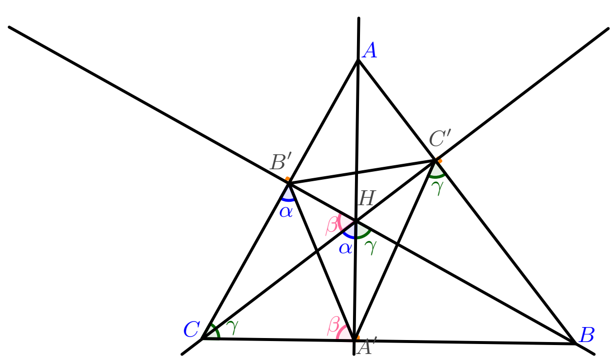
Théorème 2.2. *Soit ABC un triangle acutangle, i.e. dont les angles sont tous aigus. Il existe un unique triangle inscrit dans ABC de périmètre minimal et c'est le triangle orthique à ABC.*

Démonstration.

Exercice 4 (Préliminaire). Soit ABC un triangle et soient A' B' et C' les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B et C. Montrer que $\widehat{\mathrm{ACB}} = \widehat{\mathrm{A'C'B}} = \widehat{\mathrm{AC'B'}}$



Solution :



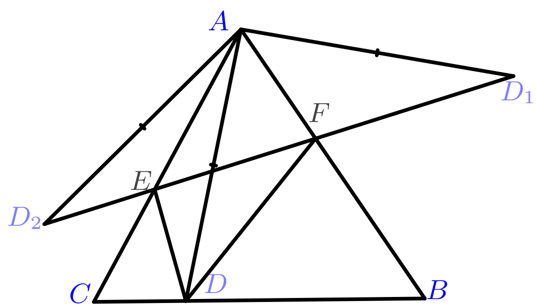
Par le théorème de l'angle inscrit, B', H A', et C sont cocycliques (cf. droite de Simson), de même les points $HC'BA'$ sont cocycliques. On a donc par théorème de l'angle au centre les relations angulaires décrites sur la figure ci-dessus. De plus, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ et $\widehat{\mathrm{ACB}} = 180° - \alpha - \beta$ par somme des angles d'un triangle. Donc $\widehat{\mathrm{ACB}} = \gamma = \widehat{\mathrm{A'C'B}} = \widehat{\mathrm{AC'B'}}$, la dernière égalité résultant d'un raisonnement analogue avec les points A, C', H et B' cocycliques.

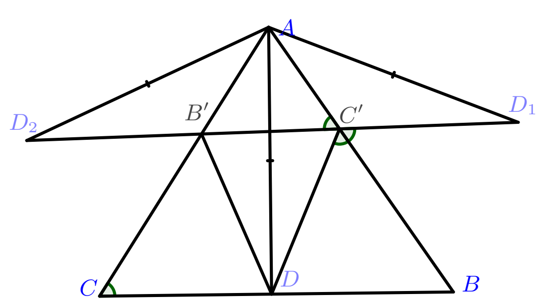
□

Exercice 5. Soit ABC un triangle acutangle. On supposera jusqu'à la fin que D, E et F sont respectivement sur $[BC]$, $[AC]$, et $[AB]$
On considère D_1 et D_2 les symétriques de D par rapport respectivement aux droites (AB) et (AC).

1. En interprétant le périmètre de DEF montrer que pour qu'il soit minimal il faut que D soit le pied de la hauteur issue de A.
2. On fixe $D = A'$ le pied de la hauteur issue de A, on pose B' et C' comme dans la définition du triangle orthique, et E et F réalisant le minimum du périmètre de DEF. A l'aide d'une chasse aux angles, montrer que $E = B'$ et $F = C'$. Conclure.

Solution :



1. On peut interpréter le périmètre de DEF comme la longueur $D_1F + FE + ED_2$. En effet par symétrie $D_2E = ED$ et $D_1F = FD$. Or à D fixé, donc lorsque D_1 et D_2 sont fixés, cette quantité est minimale lorsque D_2, E, F et D_1 sont alignés. Donc à D fixé le triangle inscrit de périmètre minimal dont D est un sommet est celui décrit par la figure ci-dessus. Il convient maintenant de faire varier D pour trouver un périmètre minimal, i.e. une longueur D_1D_2 minimale. Le triangle AD_1D_2 est isocèle en A par construction. Si $\alpha = \widehat{\mathrm{CAB}}$, l'angle $\widehat{\mathrm{D_2AD_1}}$ vaut 2α qui est *constant*. Donc D_1D_2 est minimal lorsque $AD_1 = AD$ est minimal. Ceci est vrai lorsque D est le projeté orthogonal de A sur $[CB]$ (d'après le théorème de Pythagore), c'est-à-dire lorsque D est le pied de la hauteur issue de A. D'où le résultat voulu.
2. 

   On a que $DB'C'$ est le triangle orthique de ABC, donc

$$\widehat{\mathrm{D_1C'B}} = \widehat{\mathrm{DC'B}} = \widehat{\mathrm{DCB'}} = \widehat{\mathrm{AC'B'}}$$

On en déduit que B', C' et D_1 sont alignés, on a même par un raisonnement similaire que D_2, B', C' et D_1 sont alignés donc $E = B'$ et $F = C'$. Finalement, on a montré que pour un triangle ABC acutangle, le seul triangle inscrit de périmètre minimum est le triangle orthique.

$\square$

Vol. 1, No. 4, 2017, pp. 18–21

LA BEAUTÉ DES MATHÉMATIQUES

La géométrie autour de nous

Mouad Moutaoukil

« Les mathématiques sont la poésie des sciences. » Léopold Sédar Senghor

D'une beauté souvent comparée à celle des arts visuels et de la poésie, les subtilités de cette science harmonieuse ne sont généralement pas appréciées par tout le monde, c'est pourquoi nous avons décidé, pour ce quatrième numéro, de vous présenter quelque chose qui plaît non seulement au cerveau passionné de mathématiques, mais aussi à l'œil du grand public : des objets mathématiques d'une grande valeur artistique, capables d'attirer l'attention de tout le monde. Ces objets dont on parle proviennent généralement de la nature ou encore de l'imagination des artistes et mathématiciens, représentés soit par *la géométrie*, secteur très actif des mathématiques qui est également fortement présent aux olympiades ; ou *la topologie*, qui, en étudiant les déformations des objets, présente des formes et des constructions surprenantes.

FIGURE 1. Le ruban de MOEBIUS (1790-1868) constitue l'un des paradoxes géométriques les plus célèbres et les plus immédiatement compréhensibles. Il suffit de coller les deux extrémités d'un ruban en faisant au préalable subir à l'une d'elles une torsion de 180 degrés sur elle-même. On passe sans transition d'une face à l'autre du ruban en le parcourant. (Futura sciences)

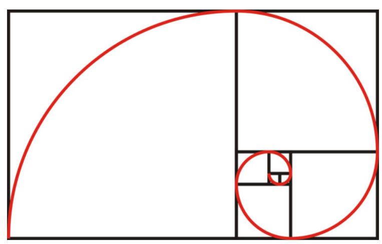
Géométrie plane : Dans la nature et aux Olympiades

Les mathématiques sont présentes partout dans la nature. La géométrie nous entoure par ses différentes représentations, il suffit d'ouvrir les yeux et de regarder autour de nous. On retrouve par exemple des cercles simplement en jetant un caillou dans une mare d'eau, ou en regardant la lune ou une éclipse du soleil ; cercles redessinés parfaitement en géométrie, qui reste, à l'instar d'une grande partie de l'art d'ailleurs, une représentation du monde réel.

La photo ci-dessous, montrant un flocon de neige vu au microscope (d'une taille d'environ un cinquième de millimètre), recèle de propriétés géométriques : la symétrie et la rotation sont retrouvées. La structure hexagonale des cristaux permet en outre de représenter des hexagones qui sont à la base de leur tracé régulateur en reliant les 'sommets' du flocon.

Certaines espèces végétales ou animales possèdent des structures géométriques étonnantes comme la spirale d'or que l'on retrouve dans la pomme de pin, la fleur de tournesol, de cactus, l'escargot ou l'ammonite. Cette spirale est mathématiquement déduite du nombre nombre, on construit d'abord un rectangle d'or, Longueur/Largeur = nombre d'or, puis un carré de côté la largeur du rectangle et on réitère l'opération. On retrouve la suite de Fibonnaci dans les côtés des carrés : $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$

Même dans l'infiniment petit, les molécules sont généralement constituées d'atomes liés les uns avec les autres pour former des polygones ou des polyèdres réguliers.



La beauté qui émane de la géométrie des exercices olympiques est d'un tout autre genre ; une beauté que seul un œil vraiment expérimenté et passionné saura déceler, et surtout apprécier, car elle n'est pas superficielle, mais plutôt de fond, comme dans le reste des mathématiques olympiques.

FIGURE 2. Mathcounts.

Objets mathématiques : objets d'art

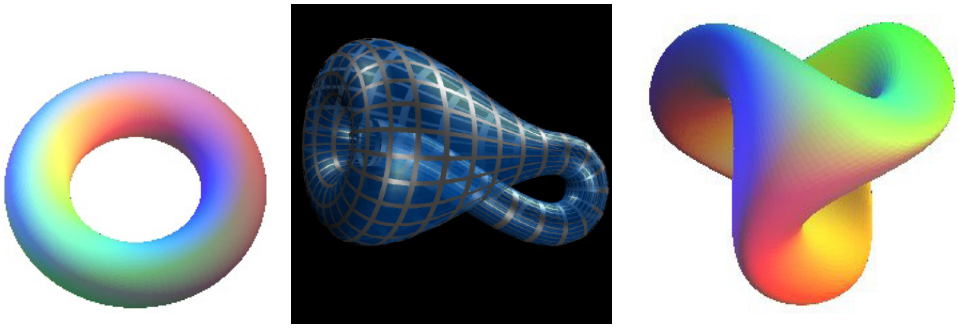


FIGURE 3. Objets mathématiques : 1. Tore ouvert, 2. Bouteille de Klein, 3. Surface de Boy.

Le passage aux dimensions supérieures, notamment 3, nous ouvre tout un monde de possibilités. Les figures représentées ci-dessus en sont un exemple.

1. C'est un solide géométrique de trois dimensions en forme de tube courbé refermé sur lui-même, engendré par la rotation d'un cercle autour d'un autre cercle au rayon supérieur à celui du premier (ce qui fait que le tore soit **ouvert**).

2. La bouteille de Klein peut être réalisée par recollement de deux rubans de Moebius le long de leurs bords. Elle n'existe qu'en dimension 4. La représentation en 3D est en fait une surface qui s'auto-intersecte. Si nous raisonnons avec une quatrième dimension, il suffit d'imaginer qu'à cet endroit, la bouteille passe « dessus » et « dessous » au sens de cette quatrième dimension.

3. C'est une sphère dont on a recollé deux à deux les points antipodaux, ou encore un disque dont on a recollé deux à deux les points diamétralement opposés de son bord. On peut également la construire en recollant le bord d'un disque sur le bord d'un ruban de Moebius.

FIGURE 4. « Mathematics » par Adam Pekalski ; le loup et le lapin, étant sur un ruban de Moebius, sont sur le même chemin, tout comme le chemin droit qui se trouve en dessous.

Pour conclure, on remarque que ce qui a été présenté peut aussi bien être vu artistiquement qu'être analysé mathématiquement. En effet, les mathématiques intersectent grandement avec les arts visuels ; on donnera l'exemple de l'art fractal, une forme d'art basé sur les objets fractals, qu'on peut définir comme étant des objets mathématiques, telle une courbe ou une surface, dont la structure est invariante par changement d'échelle. Présents également dans la nature, ils constituent un très bel exemple de la diversité des mathématiques.

Figure 5. Fractale dans la nature.

Vol. 1, No. 4, 2017, pp. 22–22

EXERCICES

Les lecteurs sont conviés à nous envoyer leurs résultats ou exercices dans la langue de leur choix à l'adresse redac.mathetmaroc@gmail.com.
Toute proposition doit nous parvenir au plus tard le **17 janvier 2018**.

Polynômes

Exercice 20. Factoriser l'expression suivante : $(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3)$.

Exercice 21. (Maroc - MO 2012) Trouver les polynômes P qui vérifient :

$$P(x+1) = P(x) + 2x + 1.$$

Géométrie

Exercice 22. Soient A, B, C et D quatre points alignés, $\mathit{\Gamma}_1$ le cercle de diamètre $[AC]$ et de centre O_1 et $\mathit{\Gamma}_2$ le cercle de diamètre $[BD]$ et de centre O_2. Soit P un point d'intersection de $\mathit{\Gamma}_1$ et $\mathit{\Gamma}_2$. On suppose que (PO_2) est tangente à $\mathit{\Gamma}_1$. Montrer que (PB) et (PD) sont les deux bissectrices (intérieure et extérieure) de l'angle $\widehat{\mathrm{APC}}$.

Exercice 23. Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit $\mathit{\Gamma}$ un cercle. Soit $[BC]$ une corde et soit A sur $\mathit{\Gamma}$ tel que l'arc $\widehat{BA}$ égale l'arc $\widehat{AC}$. Soient D et E sur $\mathit{\Gamma}$ de l'autre côté que A de $[BC]$. Les droites (AD) et (AE) coupent (BC) respectivement en F et G. Montrer que D, E, F et G sont cocycliques.
2. Soit ABC un triangle. Montrer que

$$\frac{\sin(\widehat{\mathrm{A}})}{BC} = \frac{\sin(\widehat{\mathrm{B}})}{AC} = \frac{\sin(\widehat{\mathrm{C}})}{AB}$$

Indication : on peut se ramener au cas du triangle rectangle.

Divers

Exercice 24. L'ensemble M est une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\mathbb{Z} \subset M$ $\quad$ (ii) $\forall x, y \in M, x+y \in M$ et $xy \in M$ $\quad$ (iii) $\sqrt{2}+\sqrt{3} \in M$

Montrer que $\sqrt{12} \in M$.

Exercice 25 (Maroc-MO 2004). On considère un pentagone régulier de côté a et de diagonale b.
Montrer que

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = 3.$$

Vol. 1, No. 4, 2017, pp. 23–25

CORRECTIONS DU NUMÉRO PRÉCÉDENT

Combinatoire

Exercice 13. Dans un plan sont placés 66 points distincts. On trace toutes les droites déterminées par deux de ces points et on en compte 2016 distinctes. Montrer que parmi ces 66 points, 4 au moins sont alignés.

Solution : Pour montrer que 4 points au moins sont alignés, il faut montrer qu'avec des alignés de 2 points et de 3 points uniquement, nous ne pouvons pas arriver à 2016 droites distinctes. Tout d'abord, supposons qu'il n'y ait que 2 points par droite. Nous obtenons alors $\binom{66}{2}$ droites distinctes. Or $\binom{66}{2} = \dfrac{66 \times 65}{2} = 33 \times 65$. C'est donc un nombre impair, nécessairement différent de 2016.
Considérons désormais une configuration de points telle qu'il y ait au plus 3 points alignés par droite. Soient 3 points A, B, C alignés d'une telle configuration. Comparativement au cas où ils ne sont pas alignés, on réduit le nombre de droites de 2 : il y aurait 3 droites (AB), (AC) et (BC) contre une seule. Par conséquent, en partant des 66 points n'ayant que des alignements par 2 et en créant des alignements par 3, on ne change pas la parité du nombre de droites. Comme le nombre de droites dans le cas d'alignements par 2 uniquement est impair, il le reste quand on rajoute des alignements par 3. Or 2016 est pair, donc il existe au moins 4 point alignés. $\square$

Exercice 14. On part de l'ensemble $\{3, 4, 12\}$. A chaque étape, on choisit deux nombres a, b de notre ensemble et on les remplace par $0,6a - 0,8b$ et $0,8a + 0,6b$.

1. Peut-on obtenir en un nombre fini d'étapes l'ensemble $\{4, 6, 12\}$?
2. Peut-on obtenir en un nombre fini d'étapes un ensemble de la forme $\{x, y, z\}$ où $|x - 4|$, $|y - 6|$ et $|z - 12|$ sont tous strictement inférieurs à $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$?

Solution :

1. Dans cet exercice nous sommes face à une suite d'ensembles. On note $\{a_n, b_n, c_n\}$ l'ensemble obtenu au bout de l'étape n, avec $a_0 = 3$, $b_0 = 4$, $c_0 = 12$. Considérons alors le point de coordonnées (a_n, b_n, c_n) (l'ordre des coordonnées n'importe pas dans la suite). Nous allons étudier le comportement du carré de la distance à l'origine. On remarque tout d'abord que
$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad (0,6a - 0,8b)^2 + (0,8a + 0,6b)^2 = a^2 + b^2.$$
Ainsi, $a_n^2 + b_n^2 + c_n^2$ est un invariant.
Or, nous partons du point $(3, 4, 12)$ dont la distance à l'origine vaut $\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = 13$. Nous voulons par ailleurs arriver au point $(4, 6, 12)$. Or, $\sqrt{4^2 + 6^2 + 12^2} = 14$. Ceci est impossible puisque la distance est un invariant.
2. Un point (x, y, z) vérifiant que $|x - 4|$, $|y - 6|$ et $|z - 12|$ sont tous strictement inférieurs à $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ vérifie aussi que
$$(x - 4)^2 + (y - 6)^2 + (z - 12)^2 < 1.$$

On va noter $d((x,y,z),(x',y',z')) = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$ la distance du point (x,y,z) au point (x',y',z'). La relation précédente s'écrit donc

$$d((x,y,z),(4,6,12)) < 1.$$

Toutefois, en utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient que

$$d((x,y,z),(0,0,0)) > 13 = d((3,4,12),(0,0,0)).$$

D'après l'invariant précédent, on ne peut pas atteindre (x,y,z) en partant de $(3,4,12)$.

□

Équations fonctionnelles

Exercice 15. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy$$

Solution : Soit $P(x,y)$ l'assertion $f(f(x+y)) = f(x+y) + f(x)f(y) - xy$. On pose $a = f(0)$. On va chercher à déterminer a.

$P(x+y,0)$ donne que $f(f(x+y)) = f(x+y)(a+1)$. En reportant cela dans $P(x,y)$, on obtient

$$af(x+y) = f(x)f(y) - xy$$

qu'on notera $Q(x,y)$.
$Q(a,-a)$ implique que $f(a)f(-a) = 0$. Donc, $f(a) = 0$ ou $f(-a) = 0$. Soit $u = a$ ou $-a$ tel que $f(u) = 0$. $P(u,0)$ donne que $f(0) = 0$, donc $a = 0$.

$Q(x,y)$ devient alors

$$f(x)f(y) = xy$$

En remplaçant x, y par 1, on obtient $f(1)^2 = 1$ donc $f(1) = 1$ ou $f(1) = -1$. En remplaçant y par 1, $f(x)f(1) = x$, donc $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$.

Il suffit alors d'injecter ces deux possibilités dans l'équation initiale. On trouve que seule $f(x) = x$ est solution. Ainsi, la seule solution de l'équation est f définie par $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. □

Exercice 16. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$,

$$f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x) + f(y))$$

Solution : Soit $P(x,y)$ l'assertion $f(x+y) + f(x-y) = 2(f(x)+f(y))$.
$P(x,0)$ donne que $f(0) = 0$. Alors $P(0,x)$ s'écrit $f(x) = f(-x)$: f est paire. Il suffit donc de s'intéresser aux x positifs.

D'après $P(x,x)$, $f(2x) = 4f(x)$.
D'après $P(2x,x)$, $f(3x) = 9f(x)$
En continuant ainsi, on obtient par une récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(nx) = n^2 f(x) \tag{0.1}$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n(\frac{x}{n})) = n^2 f(\frac{x}{n})$, ce qui implique

$$f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{f(x)}{n^2} \tag{0.2}$$

On sait que tout rationnel positif a peut s'écrire $a = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
Soit $a \in \mathbb{Q}_+$ et $a = \frac{p}{q}$ une telle écriture.
On a $f(a) = f(\frac{p}{q}) = p^2 f(\frac{1}{q})$ grâce à (1). En utilisant (2), $f(\frac{1}{q}) = \frac{1}{q^2}f(1)$. Ainsi, $f(a) = \frac{p^2}{q^2}f(1) = a^2 f(1)$. Donc $f(a) = f(1)a^2$ pour tout a rationnel, puisque f est paire.

En considérant l'équation initiale, on trouve bien que la fonction f définie par $f(x) = \alpha x^2$ est solution pour n'importe quel $\alpha \in \mathbb{R}$. □

Divers

Exercice 17. Un nombre constitué de 600 six et d'un nombre fini, éventuellement nul, de zéros à la fin peut-il être un carré parfait ?

Solution : Soit A un tel nombre. Si A est un carré parfait, il se termine par un nombre pair de zéros. En les supprimant, on a encore un carré de la forme $2B$ où B est constitué de 600 trois. En particulier, il se termine par 3 donc il n'est pas pair. A n'a donc qu'un seul facteur 2. Il ne peut pas être un carré parfait. □

Exercice 18. Montrer qu'il n'existe aucun polynôme P à coefficients entiers tel que $P(7) = 11$ et $P(11) = 13$.

Solution : Nous présentons deux solutions. La première est due à un lecteur, Amine Boudlal.

- **Solution 1.** Raisonnons par l'absurde en considérant le polynôme $M = P - 11$. M est clairement à coefficients entiers et $M(7) = 0$. M se met donc sous la forme $(X-7)Q$ où $Q \in \mathbb{Q}[X]$. En fait, comme $X - 7$ est unitaire, on peut effectuer la division de M par $X - 7$ dans $\mathbb{Z}[X]$, de sorte que $Q \in \mathbb{Z}[X]$. Alors $2 = M(11) = 4Q(11)$ et $Q(11) \in \mathbb{Z}$: c'est absurde. D'où le résultat.
- **Solution 2.** Montrons que $a - b$ divise $P(a) - P(b)$ si $a, b \in \mathbb{Z}$. Pour cela, écrivons P sous la forme

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$$

avec $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$P(a) - P(b) = \sum_{i=0}^{n} a_i (a^i - b^i)$$

où chaque $a^i - b^i$ est divisible par $a - b$. Donc $P(a) - P(b)$ aussi est divisible par $a - b$.
En particulier, $P(11) - P(7)$ est divisible par $11 - 7 = 4$. Mais $P(11) - P(7) = 2$. On obtient une contradiction.

□