Vol. 1, No. 5, 2018

Math&Maroc est une revue mathématique publiée par l'association du même nom. Elle propose des cours et des problèmes à résoudre de niveau secondaire. Nous vous invitons à nous envoyer tous vos commentaires, remarques et suggestions en nous contactant à l'adresse redac.mathetmaroc@gmail.com.
Nous sommes aussi intéressés par de nouveaux problèmes. Tout problème proposé devrait s'accompagner d'une solution, ou au moins d'informations suffisantes pour indiquer qu'une solution est possible. Veuillez inclure toute référence ou réflexion qui pourrait aider les rédacteurs et rédactrices. Nous vous invitons particulièrement à envoyer des problèmes originaux. Toutefois, tout problème intéressant quoique non original est le bienvenu pour autant qu'il soit accompagné des références nécessaires. Dans ce cas-là, il faut obtenir la permission de l'auteur avant de publier le problème.
Le journal est aussi ouvert à de nouveaux articles ou de nouveaux cours. Les articles devraient être soigneusement rédigés et raisonnablement courts. Ils devraient être d'un niveau accessible à des élèves de collège ou de lycée.
N'hésitez pas à nous contacter pour toute information complémentaire.

Sommaire

Mathématiciens d'hier et d'aujourd'hui

Portrait d'un mathématicien : Évariste Galois 2
Par *Mouad Moutaoukil*
Coin des anciens : Farid Mountassir 4
Par *Mountassir Farid*

Cours

Cours Valuations p-adiques 10
Par *Mouad Moutaoukil*
Cours Angles orientés 16
Par *Zouhair Ziani*

Beauté des mathématiques

Les maths de la musique ou la musique des maths 25
Par *Lina Berrada et Mouad Moutaoukil*

Problèmes

Corrections du numéro précédent 30

Éditorial

Ce cinquième numéro du Journal coïncide avec un événement très important dans le chemin qui mène aux Olympiades Internationales de Mathématiques ; c'est la sélection de l'équipe qui représentera le Maroc aux OIM 2018 en Roumanie. On vous présentera alors une rubrique spéciale, qui est une interview avec l'un des membres de notre équipe, ainsi que le témoignage d'un ancien participant comme d'habitude. Viendront ensuite deux cours très intéressants de théorie des nombres et de géométrie, après l'histoire idyllique du mathématicien Évariste Galois. Ce numéro se promet très rythmé et mélodieux, surtout avec la rubrique beauté des mathématiques, qui abordera le thème de la musique. Espérant être à la hauteur des attentes, on vous souhaite une très bonne lecture !

Mouad Moutaoukil

Design par *Abdelkader Benaissat*

Mathématiciens d'hier et d'aujourd'hui

www.mathemaroc.com

Vol. 1, No. 5, 2018

Vol. 1, No. 5, 2018, pp. 2-3

Portrait d'un mathématicien : ÉVARISTE GALOIS

Mouad Moutaoukil

Ce numéro vous racontera la vie d'un personnage légendaire, un héros idyllique ; le mathématicien qui a vécu 20 ans, qui a révolutionné le monde des mathématiques pour toujours et dont la courte vie a inspiré un grand nombre de scientifiques, artistes, écrivains, ou simples gens : ÉVARISTE GALOIS. Comparé à RIMBAUD par le poète VICTOR SEGALEN et présent dans plusieurs œuvres littéraires et même cinématographique (non ho tempo 1972), GALOIS sortit de la sphère des mathématiques au début du 20ème siècle, et devint un personnage publique, que tout le monde citait comme étant l'exemple du génie mal compris.

GALOIS est né le 25 octobre 1811 à Bourg-la-Reine et il est mort le 31 mai 1832 à Paris, dans une famille républicaine. Il découvre les mathématiques à 15 ans après son inscription en première année de mathématiques préparatoires. Il aborde la science avec facilité, intérêt et "fureur". Peu après, il est classé premier au concours général et il est admis en tant qu'élève en classe de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-grand. Footnote : Le concours général, présent depuis 1747 et très valorisé en France, est également retrouvé au Maroc, dans les matières scientifiques. Il est accessible à nos meilleurs élèves de terminale. C'est une chance à ne pas rater, surtout pour les élèves ayant suivi un entraînement olympique, qui prédominent d'ailleurs les lauréats en mathématiques depuis sa création.

Le jeune mathématicien a préparé le concours de la plus grande école de son temps : l'école polytechnique, il échoua au concours à deux reprises et se retrouva à l'École préparatoire (normale). Il commença à publier quelques articles et s'intéresser à de nouvelles idées, surtout en ce qui concerne l'algèbre qu'il trouve incomplète. Il rédige un mémoire rassemblant les résultats de ses recherches afin de concourir au grand prix de mathématiques de l'Académie des Sciences : *Mémoire sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux.* Les deux premières versions du manuscrit furent perdues et la troisième ne reçut pas l'approbation de l'Académie. Quoique ce mémoire soit considéré par plusieurs comme étant venu avant son temps, son analyse nous rappelle qu'il n'est pas toujours entièrement limpide ou rigoureux, et pas immédiatement compréhensible ni par les contemporains de Galois ni aujourd'hui.

Galois est reconnu comme génie des mathématiques 14 ans après sa mort, avec la publication de ses travaux par Joseph Liouville. Suivirent ensuite des interprétations et des développements du travail par plusieurs mathématiciens : Betti, Cayley, Serret, Camille Jordan, Dedekind, Kronecker ... La théorie de Galois est alors née et le jeune homme laissa son nom à toute une branche des mathématiques contemporaines.

Le travail de Galois n'est pas tombé dans les ténèbres du passé, mais a fait partie du présent des mathématiques pendant presque deux siècles. C'est comme si sa courte vie se compensait par la longévité de ses recherches. En 1832, on ne sait si c'est à cause de ses engagements politiques ou une éventuelle affaire amoureuse, ce qu'on sait, c'est que, dormeur du val agité, Galois mourut à 20 ans, sans connaître la gloire et la reconnaissance adaptés à sa personne.

Vol. 1, No. 5, 2018, pp. 4-8

Le coin des anciens

Mountassir FARID

Introduction

Prélude. Avant de commencer mon récit, j'aimerais bien dire que j'ai lu les témoignages des anciens participants dans les numéros passés de la revue Math&Maroc et j'ai trouvé du plaisir à les suivre, surtout que je me suis reconnu dans certains passages. Ces témoignages sont hautement instructifs et pourront aider les prochains participants en matière de savoirs et savoir-faire.

Je ne me rappelle pas très clairement des faits et j'avoue que l'exercice de témoigner n'est pas facile. Cependant, plus j'avance dans la rédaction, plus certains souvenirs me reviennent.

Aujourd'hui, 5 ans après ma participation à la $53^{\text{ème}}$ édition des olympiades internationales de mathématiques (OIM) en Argentine. Je me sens heureux de partager mon expérience avec vous, lecteurs de la revue Math&Maroc. Certes, mon récit ne sera pas complètement fidèle puisque le début de l'histoire remonte à peu près à une dizaine d'années ; mais avec le recul que j'ai aujourd'hui, j'aimerais partager mon parcours, ma façon de penser et mes motivations.

Ma $1^{\text{ère}}$ olympiade de mathématiques. Une façon de penser m'a été inculquée, je ne sais par quel biais : croire que les défis sont les étincelles qui font progresser les hommes et parfaire leurs aptitudes. Il a été toujours ainsi pour moi. Quelques connaissances que j'avais côtoyées, pendant ma dernière année de collège, m'avaient poussé à travailler davantage. Mon effort a été récompensé : suite à mes notes aux examens, mon enseignant m'a désigné pour participer à une olympiade de mathématiques éliminatoire organisée au niveau du collège. C'était la première fois que j'entendisse parler des olympiades de mathématiques.

Conformément au règlement, quatre élèves ont été choisis à l'issue de cette étape pour représenter le collège dans les olympiades régionales. L'étape suivante a été difficile et la prestation globale du collège était médiocre : notre enseignant avait corrigé les copies des participants en quelques minutes, nous faisant comprendre que nous n'avions pas le niveau des autres collèges.

Quels enseignements j'ai retenu de cette expérience ? La réalité est bien douloureuse : sans une bonne préparation, l'échec est inéluctable. C'est grâce à ce sentiment d'échec que j'ai pu aimer, d'une certaine manière, les mathématiques. L'essentiel est de se relever...

Je retrouve là une leçon qui a forgé ma personnalité et que j'ai pu méditer à travers plusieurs moments par la suite : l'amour et la passion pour ce qu'on fait sont les clés pour s'épanouir et progresser.

Inscription sur mathsmaroc. Ayant retenu ces leçons de la dernière année du collège, j'avais décidé de me préparer sereinement pour les olympiades de mathématiques du tronc commun du lycée. Pour ce faire, je me suis uniquement basé sur mon manuel marocain de mathématiques. J'ai trouvé que ce dernier était bien fait : la quantité et la qualité des exercices répondaient à tous les goûts. De plus, des exercices d'olympiades sont proposés à la fin de quelques chapitres. Parmi ceux proposés :

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$\sqrt{\frac{2a}{a+b}} + \sqrt{\frac{2b}{b+c}} + \sqrt{\frac{2c}{a+c}} \leq 3$$

m'étonna et me résista longtemps : toutes mes tentatives de résolution avaient été vouées à un échec.

J'avais alors décidé de chercher une piste sur Internet et je ne me rappelle pas comment j'avais formulé ma requête. Les résultats proposés m'avaient conduit vers une mine d'or : le forum mathsmaroc. C'était un forum créé par des marocains et dans ces temps-là, il était très actif. J'ai alors mis mon exercice de côté et je commençai à lire des sujets dans tous les replis du forum. Au passage, je découvrais des solutions proposées par les membres. Une fois que j'aie appris à utiliser Latex, je proposai l'exercice ci-haut et on me répondit avec une solution d'un ancien membre du forum. La solution était tellement belle que je la recopiai et l'analysai étape par étape. Juste après mon inscription, certains membres ont eu une idée intéressante pour animer le forum : créer des marathons régis par une règle simple : le premier membre à apporter une solution correcte peut proposer un exercice faisant partie du thème abordé dans le marathon. Je passai, alors, une grande partie de mes trois années du lycée à participer, à apprendre et à partager...

Avant d'avancer, sauriez-vous résoudre l'exercice ci-haut ?

Éliminatoires de la 53$^{\text{ème}}$ édition des OIM

Les deux premiers stages. J'ai passé toutes les épreuves des olympiades de la première année du Baccalauréat avec sérénité. Après chacune des six épreuves réparties durant toute l'année, je me rendais sur le forum mathsmaroc pour discuter et comparer mes résultats avec les membres qui s'y intéressaient. Parfois, certains exercices donnaient lieu à plusieurs solutions et il s'est avéré, par la suite, que cet échange était très enrichissant. Après les deux premières épreuves des olympiades de la deuxième année du Baccalauréat, je fus invité au premier stage qui avait eu lieu à Rabat. C'était pour moi, et pour d'autres, l'occasion de connaître en personne les membres qualifiés du forum mathsmaroc. Les premiers jours ont été consacrés pour des révisions intenses. S'ensuivaient les jours de tests : nous passions un test le matin et nous assistions à sa correction l'après-midi. Au total, chaque stage comprenait trois épreuves. Il est à noter que le compteur des points des candidats présents dans les stages est remis à zéro au début de chaque stage, ce qui n'est probablement pas la façon la plus équitable d'évaluer les élèves.

Sans détailler, je me rappelle que les moments d'annonce des résultats constituaient des moments forts et riches en émotions.

Pour finir, je souligne une particularité remarquable des tests que j'avais passés durant ces deux stages : la combinatoire n'y figurait pas. Les responsables auraient pensé que c'était le point faible des participants et qu'il serait difficile de différencier les candidats en proposant des exercices de ce thème. Alors que c'est probablement l'inverse qui est vrai : on ne s'intéressait pas à la combinatoire parce qu'elle ne faisait pas partie des tests qu'on passait dans nos établissements. Actuellement, en jetant un œil sur les épreuves envoyées aux lycées, j'ai découvert que cela a changé et c'est une très bonne chose...

APMO. Pendant le mois de mars 2012, les dix participants qui ont eu les meilleurs résultats pendant le deuxième stage ont été convoqués pour participer à l'APMO. Je me rappelle que l'épreuve n'était pas facile et seul le premier exercice était accessible. En effet, l'épreuve est totalement différente de celle des OIM, on n'était pas préparé pour ce genre d'exercices. Heureusement, notre équipe avait pu sauver la mise en remportant deux mentions honorables.

Le troisième stage. Enfin, arriva le stage à l'issue duquel l'équipe représentant le Maroc serait dévoilée. Tous les candidats savaient qu'ils n'avaient pas droit à l'erreur. Les habitudes des jours réservés pour les tests n'avaient pas changé : on passait les tests le matin et on assistait à sa correction l'après-midi.

Cette fois, un discours d'encouragement a été prononcé avant d'annoncer les résultats des deux tests de ce stage. La joie et le plaisir que j'ai sentis ce jour ont dû être vraiment intenses ! Tout ce temps que j'avais passé à préparer fut récompensé.

Un stage ultime avant le départ. Une fois réunis après les résultats des examens du Baccalauréat, nous apprîmes qu'un des participants n'était plus de notre équipe. Jusqu'à présent, la raison de son absence m'est inconnue.

À la différence des trois stages éliminatoires, ce stage avait pour objectif unique de consolider nos acquis. Les tests que nous avons passé pendant ce stage visaient notre mise en condition des épreuves qui nous attendaient à Mar del Plata. La compétition entre nous se dissipa complètement : nous formions désormais une équipe.

En plus de tout ce qu'on avait l'habitude de faire, les tests de ce stage nous ont donné l'occasion de pratiquer un exercice différent : corriger les réponses d'un autre participant. À mon avis, cet exercice est difficile en temps limité : parfois, on se trouve face à une assertion qu'on ne peut pas juger sans réflexion profonde malgré sa trivialité dans l'esprit de celui qui l'a écrite. Je compris alors la difficulté de la tâche réservée aux correcteurs. Finalement, je me rappelle qu'on nous avait offert un livret contenant les problèmes et les corrigés des tests des stages de 2011.

Reportage de 2M. La deuxième chaîne marocaine avait monté un reportage à propos de notre équipe, quelques jours avant le départ à Mer del Plata. Le reportage est toujours consultable sur Youtube [1]...

Séjour à Mar del Plata

J'ai oublié une bonne partie de ce que j'ai vécu, c'est pourquoi je me surprends souvent, agréablement, en repensant à cette expérience. Par exemple, je ne me rappelle pas quand on avait fait cette photo d'équipe :

1. https://www.youtube.com/watch?v=lh1E3mNu6kM

Le voyage. Je me rappelle qu'il n'y avait pas de vol direct entre le Maroc et l'Argentine. Notre vol, partant de l'aéroport de Casablanca, avait donc une escale en Espagne. La durée totale du vol comptait plus que 14 heures sans compter les longues heures d'escale à l'aéroport Barajas de Madrid.

Une fois sur place à Mar del Plata, nous fûmes accueillis par les organisateurs des OIM qui nous avaient guidé jusqu'à nos chambres dans l'hôtel NH Gran Hotel Provincial où s'était tenu l'événement.

La cérémonie d'ouverture. Je me rappelle qu'on était arrivé juste à temps : la cérémonie d'ouverture a eu lieu le lendemain de notre arrivée. Puisque l'hôtel ne contenait pas d'assez grandes salles pour contenir tous les participants, la cérémonie d'ouverture a été programmée dans un immense théâtre à proximité. Lors de la marche de l'hôtel au théâtre, les équipes furent guidées par une troupe de danse argentine. Chaque équipe avait une pancarte montrant le nom de son pays d'origine ainsi que quelques drapeaux. Après un discours de bienvenue et un spectacle de danse de Tango, l'hymne des olympiades des mathématiques fut chanté. Ensuite, les équipes sont passées sur scène, selon l'ordre alphabétique anglais. Le passage de notre équipe, quoique éphémère, restera à jamais gravé dans ma mémoire.

Premier jour de compétition. Avant d'entrer dans les grandes salles réservées à la compétition, nous nous sommes donnés rendez-vous pour nous encourager. Je ne me souviens pas des détails des 4 heures et demi de l'épreuve. Après qu'elle fut finie, nous nous retrouvâmes pour discuter nos solutions. S'il y a quelque chose que je retins de ce jour, c'est l'amertume de ne pas avoir répondu à l'exercice 2 qui était (attention au choc !) très facile (la moyenne des résultats obtenus à cet exercice était de 2.5 / 7). Heureusement, j'avais pu résoudre le premier problème, de la géométrie. En discutant avec les membres de l'équipe, je me rendis compte que j'ai utilisé un résultat intermédiaire sans le démontrer. Le troisième problème, on n'en parlait même pas.

Puisque le premier jour ne fut pas à la hauteur de mes attentes, je me promis de réussir au moins le premier problème du deuxième jour et essayer de gagner quelques points au deuxième. Le troisième problème, on n'en parlait même pas.

Deuxième jour de compétition. N'ayant pas eu affaire à une équation fonctionnelle dans le test du premier jour, un de nos accompagnateurs nous conseilla de nous consacrer à l'éventuelle équation fonctionnelle, quitte à ne pas penser aux autres exercices. Le premier problème demandait justement de résoudre une équation fonctionnelle. Sauf que, la facilité des deux premiers exercices le premier jour fut rattrapée durant le test du deuxième jour : l'équation fonctionnelle n'était absolument pas facile. Même en utilisant un nombre considérable de feuilles de brouillon, je ne pus avoir que 3 points, pour un seul résultat intermédiaire important. Je me rappelle que la géométrie et l'arithmétique étaient également présents dans le reste de l'épreuve.

L'après épreuves. Après la fin des deux épreuves, tous les participants ont commencé à fréquenter l'immense salle de jeu pour se détendre et surtout, faire connaissance avec les autres participants. Le lendemain des épreuves était un jour de repos, vite passé. Le jour suivant, une sortie à l'aquarium de Mar del Plata était prévue, mais fut annulée à cause du mauvais temps. Le lendemain, une visite de la ville a été organisée en compagnie de quelques équipes.

La cérémonie de clôture. Les résultats furent annoncés durant la matinée du jour de la cérémonie de clôture. Nous avons félicité Mehdi Ouaki et Mustapha Adnane pour leurs médailles de bronze. Les participants ayant obtenu des médailles ont été invités à passer sur scène pour les récupérer.

Ainsi, l'évènement prit fin et nous rebroussâmes chemin vers le pays.

Conclusion

Dernier souvenir. Pendant les dix jours qu'on avait passé en Argentine, il ne s'est pas passé un seul repas où nous n'avons pas montré notre regret quant à la gastronomie. C'est alors que nous comprîmes à quel la gastronomie marocaine est bonne.

Expérience enrichissante. Mon parcours académique a toujours été guidé par mon intérêt pour les mathématiques et je pense que c'est mon expérience aux OIM qui y a grandement contribué, jusqu'à maintenant.

Durant toute cette expérience, j'ai pu connaître des personnes avec qui je partage cette passion pour les maths. J'ai également eu l'occasion de faire des connaissances et acquérir certaines compétences qui m'ont grandement aidé par la suite.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont soutenu tout au long de cette aventure.

Le mot de la fin. Je me suis rendu une fois à la bibliothèque du centre où se déroulaient les stages à Rabat. À ma surprise, je retrouvai une ancienne revue contenant des exercices d'olympiades proposés par l'un des responsables de notre équipe. Le numéro que j'avais entre les mains remontait aux années 1980-1990, où le Maroc avait obtenu d'assez bons résultats.

L'histoire se reproduit : l'association Math&Maroc, dont le travail ne peut qu'être loué et encouragé, a vu le jour. J'espère que la revue publiée par cette association connaîtra plus de succès et ne sera pas condamnée. J'espère aussi qu'elle contribuera encore plus à la préparation des élèves dans l'avenir.

Cours

www.mathemaroc.com

Vol. 1, No. 5, 2018

Vol. 1, No. 5, 2018, pp. 10-15

Valuations p-adiques et théorie des nombres élémentaire

Mouad Moutaoukil

Dans ce cours, on présente les valuations p-adiques d'entiers naturels, ce sont des définitions, théorèmes et applications accessibles à toute personne en connaissance des notions de base des entiers naturels et d'arithmétique, et particulièrement utiles aux olympiades des mathématiques.
Dans toute la suite, on considère p un nombre premier.

1. Définitions et théorèmes

Définitions : Soit $n \geq 2$ un entier. On appelle **valuation p-adique** de n la puissance de p qui apparaît dans la décomposition de n en facteurs premiers. On la note $v_p(n)$.
$v_p(n)$ est donc le plus grand entier naturel k tel que $p^k \mid n$ (donc $p^{k+1} \nmid n$).
On définit la valuation p-adique d'une fraction comme suit :
$v_p(\frac{a}{b}) = v_p(a) - v_p(b)$.

Théorème 1 :

$$v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b).$$

Preuve : Posons $v_p(a) = \alpha$ et $v_p(b) = \beta$, on a alors : $a = p^\alpha a_1$ et $b = p^\beta b_1$ avec a_1 et b_1 premiers avec p.
$ab = p^{\alpha+\beta} a_1 b_1 \Longrightarrow v_p(ab) = \alpha + \beta = v_p(a) + v_p(b)$

Théorème 2 : Si $v_p(a) > v_p(b)$, on a $v_p(a+b) = v_p(b)$.

Exemple d'application :

$$\text{Montrer que } \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \text{ n'est pas un entier pour } n \geq 2.$$

Solution. Remarquons que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} = \frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i}$.

En utilisant le théorème 2, on trouve que : $v_2(\frac{n!}{2i-1} + \frac{n!}{2i}) = v_2(\frac{n!}{2i})$ puis que $v_2(\frac{n!}{4i-2} + \frac{n!}{4i}) = v_2(\frac{n!}{4i})$, on itère pour finalement trouver l'égalité :

$$v_2(\sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i}) = v_2(\frac{n!}{2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}})$$

On suppose maintenant -par l'absurde- que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$ est un entier, donc

$$v_2(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}) = v_2(\frac{1}{n!} \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i}) \geq 0$$

D'où : $v_2(\frac{n!}{2^{\lfloor \log_2 n \rfloor}}) \geq v_2(n!)$, ce qui implique que $\lfloor \log_2 n \rfloor \leq 0$, absurde puisque $n \geq 2$.

Autre exemple : On procède presque de la même manière pour montrer que $\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2i+1}$ n'est pas un entier pour $n \geq 1$.

2. L'art d'utiliser les valuations élémentairement

Exemple 1 : Soient d et n deux entiers ≥ 1. On suppose que $d^2 \mid n^2$, montrer que $d \mid n$.

Solution. Il s'agit de montrer que $v_p(d) \leq v_p(n)$ pour tout nombre premier p.
On a : $v_p(d^2) \leq v_p(n^2) \Longrightarrow 2v_p(d) \leq 2v_p(n) \Longrightarrow v_p(d) \leq v_p(n)$.

Exemple 2 : Soient $a, b, c \geq 1$ trois entiers tels que

$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

On note d le *pgcd* des entiers a, b, c. Montrer que les entiers $abcd$, $d(c-a)$ et $d(b-a)$ sont des carrés parfaits.

Solution. L'équation étant homogène en a, b, c et le problème invariant par multiplication de a, b, c par un même entier non nul, on peut supposer que a, b, c sont premiers entre eux. Par symétrie de b et c, il s'agit finalement de montrer que abc et $c-a$ sont des carrés parfaits.
L'équation du problème devient $bc = ac + ab$ puis $b(c-a) = ac$. On en déduit que $abc = b^2(c-a)$, ce qui réduit le problème à montrer que $c-a$ est un carré parfait donc que toutes ses valuations p-adiques sont paires.
Soit p un premier divisant $c-a$, donc il divise $b(c-a) = ac$, ce qui implique que $p \mid a$ ou $p \mid c$. Puisque divisant leur différence, p divise les deux. a, b, c sont premiers entre eux, donc p ne divise pas b, d'où :

$$v_p(c-a) = v_p(b(c-a)) = v_p(ac) = v_p(a) + v_p(c) = \alpha + \gamma$$

En particulier, $v_p(c-a) \geq \alpha = v_p(a)$ donc $v_p(c-a+a) \geq \alpha$ d'où $\gamma \geq \alpha$. Par symétrie, $v_p(c-a) = 2\alpha$ pair. CQFD.

Exemple 3 : Soient $a, b, c \geq 1$ trois entiers tels que la somme $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}$ soit entière. Montrer que le produit abc est un cube.

Solution. On procède de la même façon que pour l'exemple 2 pour supposer que a, b, c sont premiers entre eux.
Soit p un diviseur de a. Puisque $p \mid abc \mid a^2b + b^2c + c^2a$, on a $p \mid b^2c$, d'où ou bien $p \mid b$ ou bien $p \mid c$.
On suppose donc que p divise a et b (pas c) et on montre par l'absurde que $v_p(b) = 2v_p(a)$ (pas difficile) ce qui nous permet de conclure que $v_p(abc) = 3v_p(a)$, d'où abc est un cube.

3. Valuations p-adiques des factorielles

La factorielle et la valuation p-adique sont de très bons amis. En effet, Legendre avait découvert un lien entre les valuations et les nombres factoriels des entiers, donnant ainsi, grâce à la formule qui porte son nom, des calculs assez simples de la valuation d'une factorielle.

Formule de Legendre :

Pour tout entier naturel n et p premier, on a :

$$v_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor$$

Ébauche de démonstration : Une idée de preuve repose sur la combinatoire en considérant l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$ et en comptant le nombre de fois où une puissance donnée de p apparaît dans cet ensemble.

Remarque : Quoique la somme ci-dessus ait l'air infinie, elle est bel et bien finie. En effet, $(\lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor)_i$ est nécessairement nulle à partir d'un certain i.

Autre formule de la valuation d'une factorielle :

Pour tout entier naturel n et p un nombre premier, on a :

$$v_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p - 1}$$

Où $s_p(n)$ représente la somme des chiffres de n écrit en base p.

Preuve : En base p, n s'écrit sous la forme :

$$n = \sum_{i=0}^{k} a_i p^i \text{ avec } 1 \leq a_k \leq p - 1 \text{ et } 0 \leq a_i \leq p - 1 \text{ pour } 0 \leq i \leq k - 1$$

On utilise la formule précédente pour trouver :

$$v_p(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \lfloor \frac{n}{p^i} \rfloor = \sum_{j=1}^{k} a_j (p^{j-1} + p^{j-2} + ... + 1) = \sum_{j=1}^{k} a_j (\frac{p^j - 1}{p - 1})$$

On évalue maintenant le terme $\dfrac{n - s_p(n)}{p-1}$. On sait que $s_p(n) = \sum\limits_{i=0}^{k} a_i$, ce qui implique que :

$$\frac{n - s_p(n)}{p-1} = \frac{1}{p-1}(\sum_{i=0}^{k} a_i p^i - \sum_{i=0}^{k} a_i) = \frac{1}{p-1}\sum_{i=0}^{k} a_i(p^i - 1)$$

D'où l'égalité.

Applications :

1. Trouver tous les entiers naturels n vérifiant $2^{n-1} \mid n!$

On a $v_2(n!) = n - s_2(n) \geq n - 1 \Longrightarrow s_2(n) \leq 1$, ce qui veut dire que n est une puissance de 2.

2. On note $\pi(x)$ le nombre des nombres premiers au plus égaux à x et P l'ensemble des nombres premiers.

(a) Montrer que $\binom{2n}{n}$ divise $\prod\limits_{p \in P, p \leq 2n} p^{\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \rfloor}$

(b) Montrer que $\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\pi(2n)}$

(c) Montrer que $\dfrac{x}{\ln x} = O(\pi(x))$ quand x tend vers $+\infty$.

(a) On a $\binom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ et :

$$v_p(\frac{(2n)!}{(n!)^2}) = \sum_{k=1}^{\infty}(\lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2\lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor)$$

Or, $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor = 0$ ou 1 donc

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\lfloor \frac{2n}{p^k} \rfloor - 2\lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor) \leq Card\{k \in \mathbb{N}^* \mid \lfloor \frac{2n}{p^k} > 0 \rfloor\} \leq \lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \rfloor$$

De plus, les nombres premiers diviseurs de $\binom{2n}{n} = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$ sont inférieurs à $2n$ (lemme d'Euclide). Il en découle que $\binom{2n}{n} \mid \prod\limits_{p \in P, p \leq 2n} p^{\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \rfloor}$.

(b) On a

$$\binom{2n}{n} \leq \prod_{p \in P, p < 2n} p^{\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \rfloor} \leq \prod_{p \in P, p < 2n} p^{\frac{\ln(2n)}{\ln p}} \leq \prod_{p \in P, p < 2n} (2n) = (2n)^{\pi(2n)}$$

(c) On passe au logarithme et on utilise une comparaison série intégrale pour déduire que $\dfrac{2n}{\ln(2n)} = O(\pi(2n))$. Puis on a $\dfrac{x}{\ln(x)} \backsim \dfrac{2\lfloor x/2 \rfloor}{\ln(2\lfloor x/2 \rfloor)}$ et $\pi(x) \backsim \pi(2\lfloor x/2 \rfloor)$, ce qui nous permet de conclure.

4. Lifting The Exponent (LTE)

Théorème 1 :

Si p est un nombre premier impair, premier avec les entiers a et b avec $p \mid a-b$ alors :

$$v_p(a^n - b^n) = v_p(a-b) + v_p(n)$$

Preuve : On procède par récurrence sur $v_p(n)$.
Cas $v_p(n) = 0$ **:** On a $v_p(a^n - b^n) = v_p(a-b) + v_p(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + b^{n-1})$. Remarquons maintenant que :

$$a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + b^{n-1} \equiv n.a^{n-1} \mod p$$

Car $a \equiv b \mod p$. On en déduit que $v_p(a^n - b^n) = v_p(a-b)$.
Cas $v_p(n) = 1$ **:** On pose $n = pn_1$ avec p et n_1 premier entre eux. On a alors :

$$v_p(a^{pn_1} - b^{pn_1}) = v_p((a^p)^{n_1} - (b^p)^{n_1}) = v_p(a^p - b^p)$$

On pose maintenant $a = b + kp$ puisque $p \mid a - b$. On trouve :

$$(b+kp)^p - b^p = \binom{p}{1}(kp) + \binom{p}{2}(kp)^2 + ... + \binom{p}{p}(kp)^p$$

En utilisant le fait que $p \mid \binom{p}{i}$ pour tout $1 \leq i \leq p-1$, on trouve que (Thm 1 et 2 de 3.1.) :

$$v_p((b+kp)^p - b^p) = v_p(\binom{p}{1}p) + v_p(k) = 2 + v_p(a-b) - 1$$

D'où le résultat.
H.R. On suppose que notre théorème est vrai pour $v_p(n) = k$ et on montre qu'il est vrai pour $v_p(n) = k+1$. On pose $n = p^{k+1}n_1$. On aura alors :

$$v_p((a^{p^k})^{pn_1} - (b^{p^k})^{pn_1}) = v_p(a^{p^k} - b^{p^k}) + 1 = v_p(a-b) + k + 1$$

Selon le cas $= 1$ et H.R.

Corollaire :

Si p est un nombre premier impair, premier avec les entiers a et b avec $p \mid a-b$ et n est un entier **impair** alors :

$$v_p(a^n + b^n) = v_p(a+b) + v_p(n)$$

Théorème 2 :

Si $p = 2$, n est pair et :
— $4 \mid x - y$ alors $v_2(x^n - y^n) = v_2(x-y) + v_2(n)$
— $4 \mid x + y$ alors $v_2(x^n - y^n) = v_2(x+y) + v_2(n)$

Application 1 :

Soient a, n deux entiers strictement positifs et p un nombre premier impair tel que $a^p \equiv 1 \mod p^n$. Montrer que $a \equiv 1 \mod p^{n-1}$.

Solution. Il est clair que a et p sont premiers entre eux. D'après le petit théorème de Fermat, $a^{p-1} \equiv 1 \mod p$. Puisque $a^p \equiv 1 \mod p$, on en déduit que $a \equiv 1 \mod p$. On peut donc utiliser LTE et on obtient :

$$v_p(a-1) + 1 = v_p(a-1) + v_p(p) = v_p(a^p - 1)$$

Le dernier terme étant supérieur ou égal à n, il en découle que $v_p(a-1) \geq n-1$.

Application 2 :

Soit k un entier strictement positif. Trouver tous les entiers strictement positifs n tels que 3^k divise $2^n - 1$.

Solution. Soit k tel que 3^k divise $2^n - 1$. En raisonnant modulo 3, on voit que n est pair. Écrivons donc $n = 2m$ avec $m > 0$. Alors 3^k divise $4^m - 1$. Comme 3 divise $4 - 1$, on applique LTE :

$$v_3(4-1) + v_3(m) = v_3(4^m - 1) \geq k$$

On en déduit que $v_3(m) \geq k - 1$. Ainsi $2 \times 3^{k-1}$ divise n.
Réciproquement, le même raisonnement donne que 3^k divise $2^n - 1$ si $2 \times 3^{k-1}$ divise n.

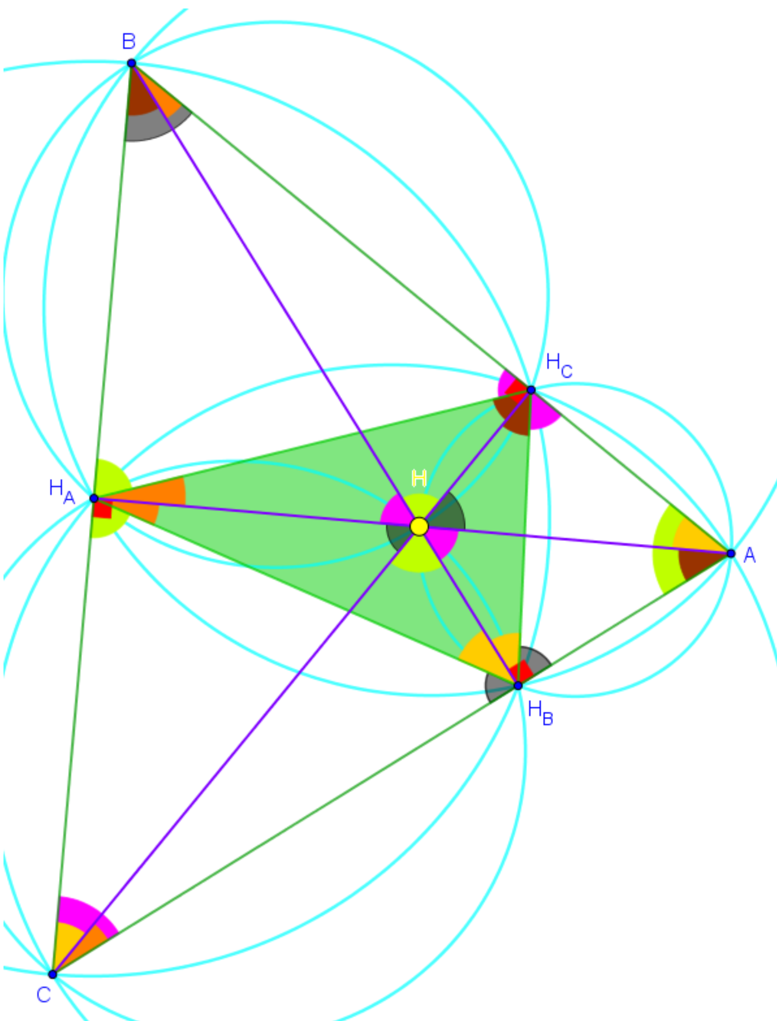
Vol. 1, No. 5, 2018, pp. 16-23

Angles Orientés

Zouhair Ziani

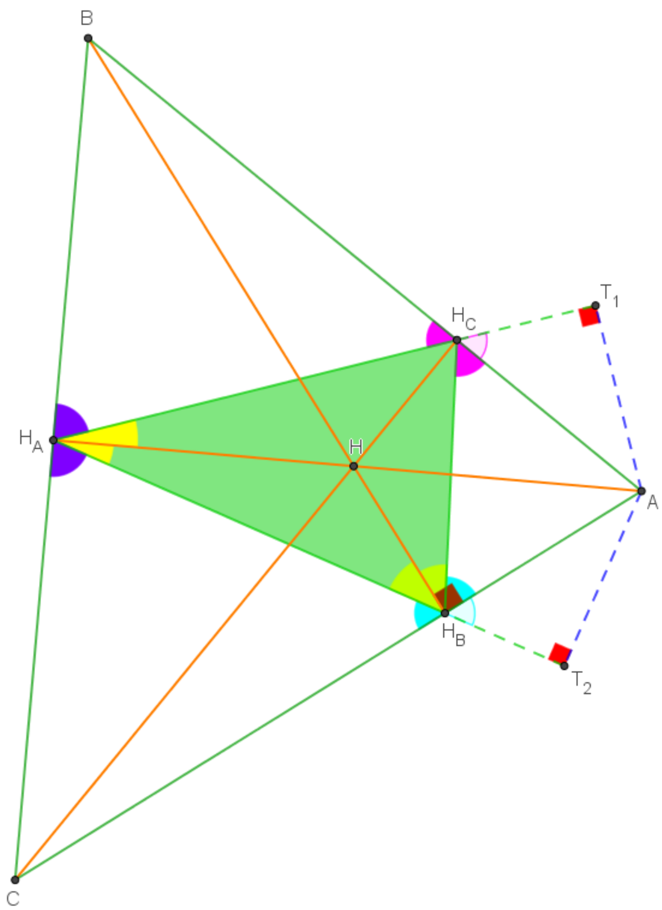
Triangle Orthique

Définition 1.1. Soit ABC un triangle acutangle, H_A, H_B, et H_C les pieds de ses hauteurs partant de A, B, et C respectivement. On dit que $H_AH_BH_C$ est le triangle orthique du triangle ABC. On admettra que les droites (AH_A), (BH_B), et (CH_C) sont concourantes en un point H dit orthocentre du triangle ABC.



Les angles droits nous indiquent six quadrilatères cycliques : AH_BHH_C, BH_CHH_A, CH_AHH_B, AH_BH_AB, BH_CH_BC, et CH_AH_CA (voir figure). Cela nous permet de se mettre en position de force, on peut déduire facilement que H est le centre du cercle inscrit du triangle $H_AH_BH_C$! Encore, les angles droits nous permettent de trouver un diamètre pour chacun des cercles circonscrits aux six quadrilatères, par exemple $[CA]$ pour CH_AH_CA ou $[BH]$ pour BH_CHH_A.

Notons qu'il est possible de montrer l'inverse ; c'est-à-dire prouver pour ABC acutangle, H point du plan tel que $(AH) \cap (BC) = \{H_A\}$, $(BH) \cap (CA) = \{H_B\}$, et $(CH) \cap (AB) = \{H_C\}$, que si H est le centre du cercle inscrit dans $H_AH_BH_C$ alors H est l'orthocentre de ABC :



Notons T_1 et T_2 les projetés orthogonaux de A sur (H_AH_C) et (H_AH_B). On a bien $AH_B \sin\widehat{CH_BH_A} = AT_2 = AT_1 = AH_C \sin\widehat{BH_CH_A}$ et $\frac{\sin\widehat{AH_CH_B}}{AH_B} = \frac{\sin\widehat{AH_BH_C}}{AH_C}$ donc $\frac{\sin\widehat{CH_BH_A}}{\sin\widehat{AH_BH_C}} = \frac{\sin\widehat{BH_CH_A}}{\sin\widehat{AH_CH_B}}$ De même $\frac{\sin\widehat{BH_CH_A}}{\sin\widehat{AH_CH_B}} = \frac{\sin\widehat{BH_AH_C}}{\sin\widehat{CH_AH_B}}$ et $\frac{\sin\widehat{BH_AH_C}}{\sin\widehat{CH_AH_B}} = \frac{\sin\widehat{AH_BH_C}}{\sin\widehat{CH_BH_A}}$ Enfin $(\sin\widehat{AH_BH_C})^2 = (\sin\widehat{CH_BH_A})^2$ donc $\widehat{AH_BH_C} = \widehat{CH_BH_A}$ et alors $\widehat{AH_BB} = \widehat{CH_BB} = 90°$ d'où le fait que $(BH) = (BH_B) \perp (CA)$ et par raisonnement similaire $(AH) = (AH_A) \perp (BC)$ et $(CH) = (CH_C) \perp (AB)$.

Théorème 1.1. Soit ABC un triangle acutangle. H point tel que $(AH) \cap (BC) = \{H_A\}$, $(BH) \cap (CA) = \{H_B\}$, $(CH) \cap (AB) = \{H_C\}$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

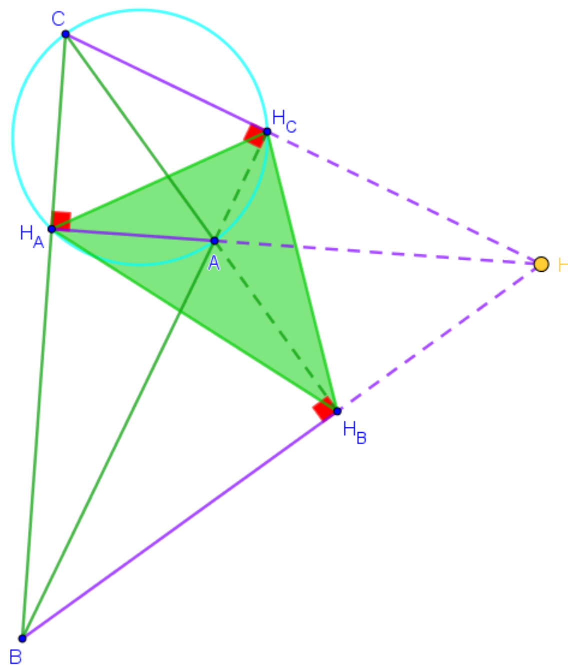
a) H est l'orthocentre de ABC

b) H est le centre du cercle inscrit dans $H_AH_BH_C$

Angles orientés

Position du problème

Mais qu'est-ce qui se passe si ABC est considéré obtusangle en A ?

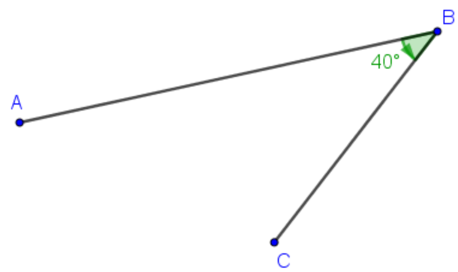


La situation est différente, mais on peut quand même vérifier que les six quadrilatères cycliques restent intacts, ainsi que leurs diamètres ! En effet, cela revient au même fait que de dire que A est l'orthocentre du triangle acutangle HBC.

Cependant, la problématique est bien claire : pour montrer que CH_AH_CA est cocyclique de diamètre $[CA]$, on est passé par le fait que $\widehat{CH_AA} = 90° = \widehat{CH_CA}$ et que H_A et H_C sont du même côté de (CA), alors que dans notre nouveau cas on doit utiliser le fait que $\widehat{CH_AA} + \widehat{CH_CA} = 90° + 90° = 180°$ et que H_B et H_C sont de côtés différents. Comment pourrai-t-on éviter de traiter un tel problème deux fois ? C'est l'utilité des angles orientés.

Définition et propriétés

Définition 2.1 L'angle $\widehat{ABC}$ sera noté $\widehat{(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})}$ et il sera considéré positif si orienté au sens opposé de celui du mouvement des aiguilles de la montre, et négatif sinon.



Dans ce cas $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) \equiv 40°[360°]$ mais $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) \equiv -40°[360°]$

Remarque 1. La notation $a \equiv b[c]$ (dite a est congru à b modulo c) signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kc$. Par conséquent on pourra écrire $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) \equiv 320°[360°]$ à la place de $(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) \equiv -40°[360°]$

Remarque 2. La plupart du temps on travaille modulo 180°. Notons que :

$$a \equiv b[180°] \iff (a \equiv b[360°] \text{ ou } a \equiv b - 180°[360°])$$

Remarque 3. $2a \equiv 2b[360°] \iff a \equiv b[180°]$

Propriétés Soient A, B, C, et D quatre points du plan.

a) $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA}}) \equiv 0°[360°]$

b) $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})[360°]$

c) $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}})[180°]$ si et seulement si B, C, et D sont colinéaires.

d) Si $(AB) \perp (BC)$ alors $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) \equiv 90°[180°]$

e) Relation de Chasles : $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) + (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}})[360°]$

f) Somme des angles d'un triangle : $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) + (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}) \equiv 180°[360°]$

g) $(AB) \parallel (CD)$ si et seulement si $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) + (\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}}) \equiv 0°[180°]$

h) Cocyclité : A, B, C, et D sont cocycliques si et seulement si $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}})[180°]$

i) Si P est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC alors $(\widehat{\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})[360°]$

⚠ **Attention !** $2(\widehat{\overrightarrow{YX}, \overrightarrow{YZ}}) \equiv 2(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})[180°]$ n'implique pas $(\widehat{\overrightarrow{YX}, \overrightarrow{YZ}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})[180°]$!

En fait $2a \equiv 2b[c]$ signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $2a = 2b + kc$. Ce k peut être impair ($k = 2l + 1$ avec $l \in \mathbb{Z}$) et dans ce cas $a = b + \frac{c}{2} + lc$ et donc $a \equiv b + \frac{c}{2}[c]$!

Se familiariser avec les angles orientés nécessite un peu d'entraînement. Un bon usage de cette nouvelle notion consiste à résoudre le problème dans une configuration spécifique, puis essayer de réécrire notre démonstration en angles orientés tout en étant attentif aux particularités de ceux-ci.

Triangles semblables

Définition 3.1. Deux triangles ABC et $A'B'C'$ non plats sont dits semblables si $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$, $\widehat{B'C'A'} = \widehat{BCA}$, et $\widehat{C'A'B'} = \widehat{CAB}$. Ceci est équivalent à $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$ (application directe de la loi des sinus)

Théorème 3.1. Il y a équivalence entre :

a) ABC et $A'B'C'$ sont semblables

b) $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{B'C'A'} = \widehat{BCA}$

c) $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$ et $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$

Définition 3.2. Deux triangles ABC et $A'B'C'$ non plats sont dits directement semblables si $(\widehat{\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})[360°]$, $(\widehat{\overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{C'A'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}})[360°]$, et $(\widehat{\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}})[360°]$.

Théorème 3.2. Il y a équivalence entre :

a) ABC et $A'B'C'$ sont directement semblables

b) $(\widehat{\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})[180°]$ et $(\widehat{\overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{C'A'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}})[180°]$

c) $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$ et $(\widehat{\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})[360°]$

Définition 3.3. Deux triangles ABC et $A'B'C'$ non plats sont dits indirectement semblables si $(\widehat{\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})[360°]$, $(\widehat{\overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{C'A'}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}})[360°]$, et $(\widehat{\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{A'B'}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}})[360°]$.

Théorème 3.3. Il y a équivalence entre :

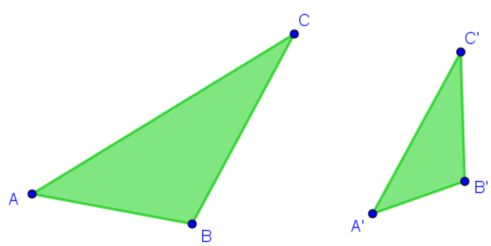
a) ABC et $A'B'C'$ sont indirectement semblables

b) $(\widehat{\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})[180°]$ et $(\widehat{\overrightarrow{C'B'}, \overrightarrow{C'A'}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}})[180°]$

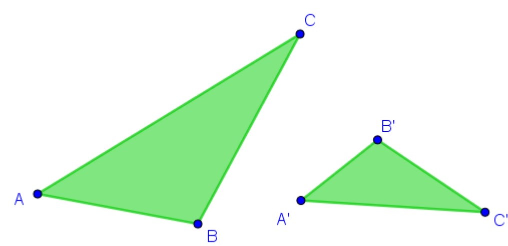
c) $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$ et $(\widehat{\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})[360°]$

Corollaire Si deux triangles sont semblables, alors ils le sont soit directement soit indirectement.

Démonstration. Si ABC et $A'B'C'$ sont semblables, alors $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC}$ et $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$, d'où $(\widehat{\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})[360°]$ ou $(\widehat{\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})[360°]$. Le signe détermine bien le sens de leur similitude.



Triangles directement semblables



Triangles indirectement semblables

Exercices et solutions

Exercices

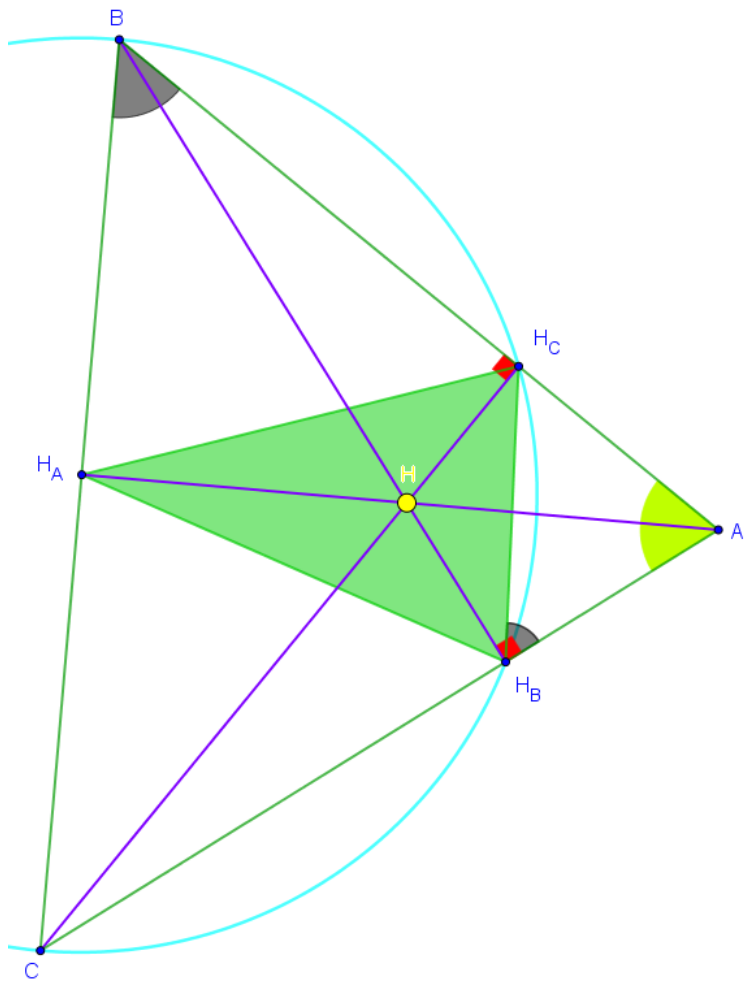
Exercice 1. Soit ABC un triangle. H_A, H_B, et H_C les pieds des hauteurs partant de A, B, et C respectivement. Montrer que ABC et AH_BH_C sont semblables.

Exercice 2. (USAMO 2013 - Day 1) Soit ABC un triangle. P, Q, et R appartenant respectivement aux côtés $[BC]$, $[CA]$, et $[AB]$. On désigne par $(\mathcal{T}_A)$, $(\mathcal{T}_B)$, et $(\mathcal{T}_C)$ les cercles circonscrits respectivement aux triangles AQR, BRP, et CPQ. Sachant que le segment $[AP]$ coupe respectivement les cercles $(\mathcal{T}_A)$, $(\mathcal{T}_B)$, et $(\mathcal{T}_C)$ en X, Y, et Z ; montrer que $\frac{YX}{XZ} = \frac{BP}{PC}$.

Solutions

Exercice 1.

On aborde cet exercice d'abord avec des angles géométriques pour le cas particulier du triangle acutangle.



On trouve $\widehat{BAC} = \widehat{H_CAH_B} = \widehat{H_BAH_C}$ car $H_B \in [AC]$ et $H_C \in [AB]$;

mais on voit aussi que $\widehat{BH_BC} = 90° = \widehat{BH_CC}$ avec H_C et H_B du même côté de (BC) donc BH_CH_BC est cocyclique et donc (vu que B et H_B sont de côtés différents de (H_CC) on a $\widehat{H_CBC} = 180° - \widehat{H_CH_BC}$;

ensuite vu que $A \in [BH_C)$ on a $\widehat{ABC} = \widehat{H_CBC}$, et $H_B \in [AC]$ donne $\widehat{H_CH_BA} = 180° - \widehat{H_CH_BC}$ et enfin $\widehat{ABC} = \widehat{H_CH_BA} = \widehat{AH_BH_C}$ d'où le fait que ABC et AH_BH_C sont semblables.

Comment généraliser ce résultat en utilisant les angles orientés ?

D'abord, il nous suffit d'observer que $H_B \in (AC)$ et $H_C \in (AB)$ pour affirmer que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AH_C}, \overrightarrow{AH_B}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{AH_B}, \overrightarrow{AH_C}})[180°]$;

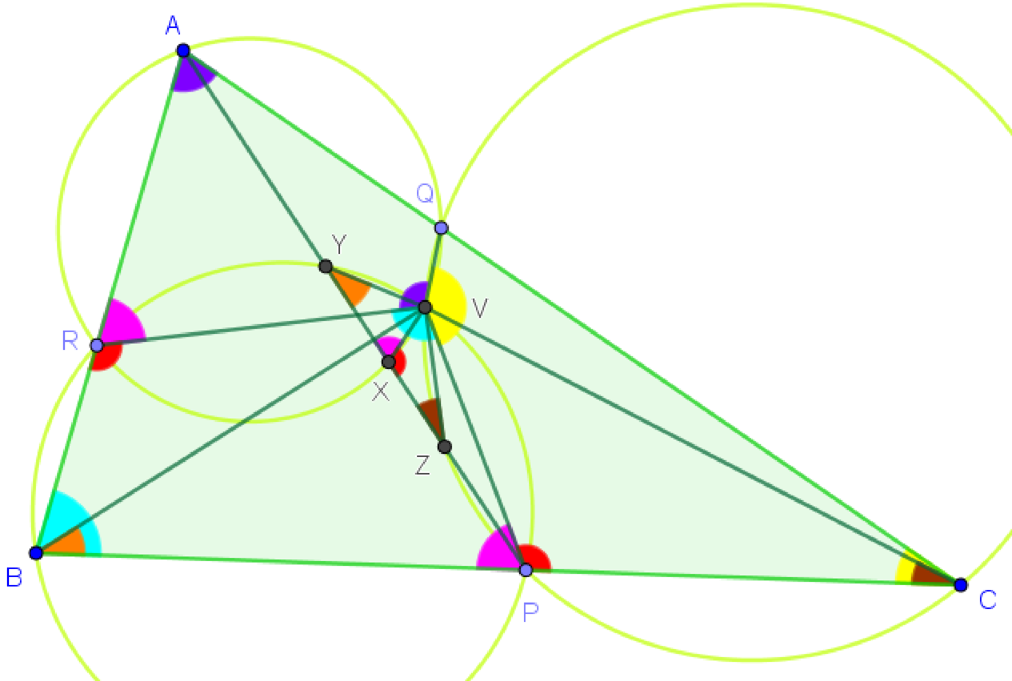
ensuite, le fait que $(\widehat{\overrightarrow{H_BB}, \overrightarrow{H_BC}}) \equiv 90° \equiv (\widehat{\overrightarrow{H_CB}, \overrightarrow{H_CC}})[180°]$ est lui aussi vrai quelque soit la configuration (car $90° \equiv -90°[180°]$), et il implique dans tous les cas que B, H_B, C, et H_C sont cocycliques, ce qui donne

$(\widehat{\overrightarrow{BH_C}, \overrightarrow{BC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{H_BH_C}, \overrightarrow{H_BC}})[180°]$;

enfin, juste le fait que $A \in (BH_C)$ donne $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BH_C}, \overrightarrow{BC}})[180°]$, et le fait que $H_B \in (AC)$ donne $(\widehat{\overrightarrow{H_BH_C}, \overrightarrow{H_BC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{H_BH_C}, \overrightarrow{H_BA}})[180°]$, d'où $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{H_BH_C}, \overrightarrow{H_BA}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{H_BA}, \overrightarrow{H_BH_C}})[180°]$.

Il s'avère donc clairement que ABC et AH_BH_C sont (indirectement) semblables. Ce dernier raisonnement ne dépend en aucun cas de la position d'un point dans une droite ni dans un plan, ce lui permet d'être valable à toutes les configurations possibles, même celles où ABC n'est pas acutangle !

Exercice 2.



Lemme. (Théorème de Miquel) Les cercles $(\mathcal{T}_A)$, $(\mathcal{T}_B)$, et $(\mathcal{T}_C)$ se rencontrent en un point V dit point de Miquel.

Démonstration.
Soit V le point d'intersection de $(\mathcal{T}_A)$ et $(\mathcal{T}_B)$ différent de R.

On a bien la relation de Chasles $(\widehat{\overrightarrow{VP}, \overrightarrow{VQ}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{VP}, \overrightarrow{VR}}) + (\widehat{\overrightarrow{VR}, \overrightarrow{VQ}})[180°]$.

On sait que $V, B, P, R \in (\mathcal{T}_B)$, $C \in (BP)$, et $A \in (BR)$ donc $(\widehat{\overrightarrow{VP}, \overrightarrow{VR}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BR}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})[180°]$.

On sait que $V, A, R, Q \in (\mathcal{T}_A)$, $B \in (AR)$, et $C \in (AQ)$ donc $(\widehat{\overrightarrow{VR}, \overrightarrow{VQ}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AR}, \overrightarrow{AQ}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}})[180°]$.

On sait aussi que $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) + (\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) + (\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}) \equiv 0°[180°]$ (car $\equiv 180°[360°]$).

Donc $(\widehat{\overrightarrow{VP}, \overrightarrow{VQ}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CQ}})[180°]$ et enfin V, C, P, et Q sont cocycliques d'où $V \in (\mathcal{T}_C)$.

Pour résoudre l'exercice, on note toujours $\{V\} = (\mathcal{T}_A) \cap (\mathcal{T}_B) \cap (\mathcal{T}_C)$.
D'une part on a

$$\left\{\begin{array}{c} (\widehat{\overrightarrow{XV}, \overrightarrow{XY}}) \underset{A\in(XY)}{\equiv} (\widehat{\overrightarrow{XV}, \overrightarrow{XA}}) \underset{X,R,V,A\in(\mathcal{T}_A)}{\equiv} (\widehat{\overrightarrow{RV}, \overrightarrow{RA}}) \underset{B\in(RA)}{\equiv} (\widehat{\overrightarrow{RV}, \overrightarrow{RB}}) \underset{R,P,V,B\in(\mathcal{T}_B)}{\equiv} (\widehat{\overrightarrow{PV}, \overrightarrow{PB}})[180°] \\ (\widehat{\overrightarrow{YV}, \overrightarrow{YX}}) \underset{P\in(YX)}{\equiv} (\widehat{\overrightarrow{YV}, \overrightarrow{YP}}) \underset{R,P,V,B\in(\mathcal{T}_B)}{\equiv} (\widehat{\overrightarrow{BV}, \overrightarrow{BP}})[180°] \end{array}\right.$$

d'où le fait que VXY et VPB sont (directement) semblables donc $\frac{YX}{BP} = \frac{VX}{VP}$.
D'autre part on a

$$\left\{\begin{array}{c} (\widehat{\overrightarrow{XV}, \overrightarrow{XZ}}) \underset{A\in(XZ)}{\equiv} (\widehat{\overrightarrow{XV}, \overrightarrow{XA}}) \underset{X,Q,V,A\in(\mathcal{T}_A)}{\equiv} (\widehat{\overrightarrow{QV}, \overrightarrow{QA}}) \underset{C\in(QA)}{\equiv} (\widehat{\overrightarrow{QV}, \overrightarrow{QC}}) \underset{Q,P,V,C\in(\mathcal{T}_C)}{\equiv} (\widehat{\overrightarrow{PV}, \overrightarrow{PC}})[180°] \\ (\widehat{\overrightarrow{ZV}, \overrightarrow{ZX}}) \underset{P\in(ZX)}{\equiv} (\widehat{\overrightarrow{ZV}, \overrightarrow{ZP}}) \underset{Z,C,V,P\in(\mathcal{T}_C)}{\equiv} (\widehat{\overrightarrow{CV}, \overrightarrow{CP}})[180°] \end{array}\right.$$

d'où encore le fait que VXZ et VPC sont (directement) semblables donc $\frac{XZ}{PC} = \frac{VX}{VP}$.
On conclut que $\frac{YX}{BP} = \frac{XZ}{PC}$ cqfd.

La beauté des mathématiques

www.mathemaroc.com

Vol. 1, No. 5, 2018

Vol. 1, No. 5, 2018, pp. 25-28

رياضيات المغرب
MATH MAROC

La beauté des mathématiques : Les maths de la musique ou la musique des maths

Lina Berrada - Mouad Moutaoukil

Introduction :

Après avoir vu plusieurs exemples de la beauté des mathématiques, il est grand temps de casser le silence en discutant le lien entre les mathématiques et une autre science, qu'on consomme tous les jours –oui elle existe !- : la musique. Cet article se veut une exploration de ce lien classique entre musique et maths ainsi que celui, un peu moins classique, entre musicalité des maths et musicalité tout court. Commençons alors cette aventure pour déchiffrer les secrets des mathématiques qui dansent aux rythmes de ces scientifiques qu'on appelle musiciens, et défricher les raisonnements qui résonnent, telles des mélodies, dans les cerveaux de ces artistes qu'on appelle mathématiciens.

Les maths de la musique :

"Nonobstant toute l'expérience que je pouvais m'être acquise dans la musique pour l'avoir pratiquée pendant une assez longue suite de temps, ce n'est cependant que par le secours des mathématiques que mes idées se sont débrouillées, et que la lumière a succédé à une certaine obscurité dont je ne m'apercevais pas auparavant." **Jean-Philippe RAMEAU – Traité de l'harmonie**

Musique tonale (Antiquité – XXe siècle) :

Pythagore est le plus connu pour avoir étudié les mathématiques de la musique. Dès l'antiquité, la musique est associée aux mathématiques. Elle est même considérée par Pythagore comme étant une science mathématique, au même titre que l'arithmétique, l'astronomie et la géométrie (qu'on nommait également les quatre "arts mathématiques"). En effet, on cite souvent Pythagore comme l'un des pères de la théorie musicale. On lui doit la compréhension des fréquences, qui sont symbolisées par les notes de musique. Evidemment, l'inexistence ou plutôt le manque de divulgation des mathématiques musicales avant l'époque de Pythagore n'a jamais empêché personne de faire de la musique : une corde tendue pincée à différentes hauteurs, le chant, les boîtes sur lesquelles on peut battre des rythmes… Tout cela existait déjà bien avant. Mais, Pythagore –et ensuite toute l'école pythagoricienne- fut celui qui relia, formellement, le nombre à la musique, qui lança l'idée que le fait que deux sons joués ensemble, simultanément ou l'un après l'autre, donnant une impression harmonieuse, pouvait s'"expliquer mathématiquement". Ce qui lui a permis d'établir notre fameuse gamme diatonique (do, ré, mi, fa, sol, la, si) avec ses différentes échelles. Ces gammes sont utilisées comme base du système tonale en musique. En effet, en analysant des œuvres issus de ce système-là, on remarque que les fréquences d'apparition des notes de la gamme varient d'une œuvre à l'autre. Certaines notes ont donc un rôle plus important. En général, une des sept notes de la gamme diatonique prédomine et leur impose une hiérarchie. C'est, en quelque sorte, une note attractive vers laquelle tendent les autres degrés, et sur laquelle on se repose.

Euler, importante figure du 18ème siècle, est également l'un des nombreux mathématiciens qui se sont intéressés à la musique depuis Pythagore jusqu'à nos jours, en publiant son Tentamen novae theoriae musicae ex certissismis harmoniae principiis dilucide expositae (Essai d'une nouvelle théorie de la musique, exposée en toute clarté selon les principes de l'harmonie les mieux fondés) dans lequel il a voulu expliquer l'origine du plaisir qu'apporte la musique. Selon lui, l'élément clef est la perfection, celle-ci se résume à la perception d'un certain ordre. Dans la musique, l'ordre vient du rapport entre les sons entendus. En effet, selon Euler, chaque son peut être représenté par un nombre. Les accords de musique (plusieurs sons simultanés) deviennent donc des rapports de nombres. Ainsi, un accord est agréable à écouter si nous arrivons à percevoir l'ordre qui y règne, donc à comprendre les proportions entre les sons. En résumé, un accord représenté par un rapport simple sera plus agréable qu'un accord représenté par un rapport compliqué. Se basant sur ces hypothèses, Leonhard Euler va classer les accords en différentes catégories, qu'il nomme les degrés de douceur. Selon lui, ce nombre indique le degré de plaisir que procure une pièce. Outre l'intérêt des mathématiciens pour la musique, les musiciens utilisent également plusieurs procédés mathématiques dans leurs compositions. C'est entre autres le célèbre Jean Sébastien Bach qui s'amuse à utiliser, pour écrire ses fugues, la répétition, l'homothétie (par la dilatation temporelle) et la symétrie... L'exemple le plus célèbre figure dans son œuvre "The Art of Fugue" où ces procédés sont identifiables dans ses canons - une forme musicale dans laquelle une idée musicale (le thème) s'énonce et se développe d'une voix à une autre, de sorte que les différentes voix interprètent la même ligne mélodique, mais de manière décalée, ce qui produit une superposition de mélodies (ce qu'on appelle un contrepoint). On retrouve ce même principe dans le célèbre Canon de Pachelbel et chez Jean-Philippe Rameau dans "Frère Jacques" par exemple.

Musique atonale (XXe siècle -) :

Au début du XXe siècle, les compositeurs cherchent à tout prix à se détacher de cette musique tonale. Il faut trouver de nouveaux systèmes de composition. On assiste alors à la création de l'atonalité (a=contre), une écriture musicale qui est contre tout ce qui sonne "juste" ou naturel pour notre oreille, pour être en complet désaccord avec notre système physiologique de perception auditive, ou la recherche du hasard en musique, ce qui nous ramène au "son", puisque ce qui différencie le "son" de la "musique", c'est une notion de cohérence ou d'ordre, sans laquelle l'humain est perdu… L'un des compositeurs les plus inclassables de la première moitié du siècle dernier : Béla Bartók utilise pour ceci le nombre d'or pour structurer ses compositions. Il est l'un des premiers compositeurs à se servir de ce procédé de manière consciente. En résulte une structure cohérente et qui paraît équilibrée sans que l'esprit ne comprenne pourquoi (jugez par vous-même avec le 3e mouvement du Concerto pour piano numéro 3).

Iannis Xenakis, compositeur grec, et qui a une formation d'architecte et d'ingénieur, utilise également ce nombre d'or. Il crée une musique nouvelle qui est constituée de masses sonores. Cela donnera Metastasis en 1955, une composition entièrement déduite de règles et de procédures mathématiques. Il ira même plus loin en créant des algorithmes pour tenter de représenter musicalement les notions de hasard et de probabilité. Quelques compositeurs, tels qu'Olivier Messiaen et Pierre Boulez, ont même explicité dans des écrits théoriques toutes les structures mathématiques dont ils se sont servis. D'autres ne le font pas, et c'est justement là où intervient le travail d'un analyste musical ou d'un musicologue qui consiste à chercher ces structures et à les mettre en valeur dans son interprétation. Pour une bonne analyse mathématique de l'œuvre, on a même créé un nouveau champ de recherche, la "musicologie computationnelle". Il s'agit donc d'analyser les œuvres musicales de façon à mettre en évidence les structures mathématiques sous-jacentes.

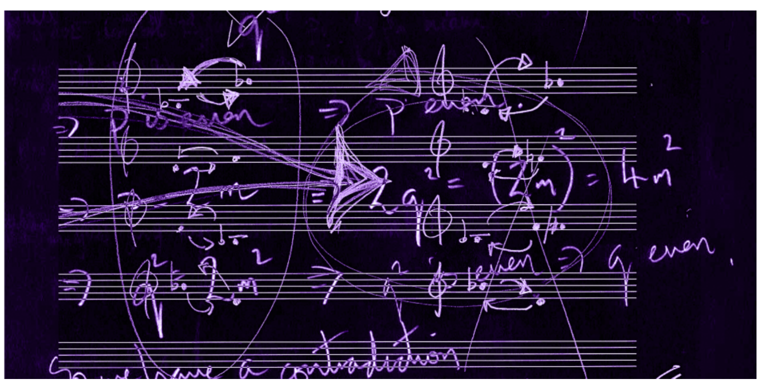
Cette utilisation des mathématiques dans la musique a connu de nombreux développements et la communauté des mathématiciens et celle des musicologues et musiciens y porte un intérêt croissant. Mais, l'émotion provoquée par cette musique-là est-elle explicable, "théorisable" ?

La musique des maths :

"Mathematics is the music of reason" **James Joseph Sylvester**

La musique étant très liée aux mathématiques, puisqu'on y retrouve, entre autres, des applications de la théorie des ensembles, de l'arithmétique modulaire, de l'analyse réelle et complexe, on essaie maintenant d'analyser l'implication réciproque en parlant d'une éventuelle musicalité des preuves ou encore de 'la musique des mathématiques'.

J'ai toujours pensé qu'il y avait une certaine musique dans les preuves et raisonnements mathématiques, qui serait constituée des subtilités de ces raisonnements. L'idée créative d'une démonstration en mathématiques sonne de la même façon que la créativité nécessaire à une improvisation à l'orgue par exemple. La poursuite de cette idée me mènera aux travaux des gens du PRiSM (the centre for Practice and Research in Science and Music) au RNCM (Royal Northern College of Music) en Angleterre. En effet, la compositrice Emily Howard et le mathématicien Marcus du Sautoy se sont posés presque la même question : Y'a-t-il de la musique cachée dans les preuves mathématiques ? Dans la quête de leur réponse, ils ont transformé des preuves mathématiques en des miniatures de quatuors à cordes, qui ont été présentées lors d'un spectacle : "The music of proof". Entre autres, le théorème de Schur en théorie de Ramsey (d'où résulte notamment le principe des tiroirs) a été mis en musique[2].



C'est subjectif certes, mais un exemple de raisonnement qui résonne par son ingéniosité est la fameuse démonstration de l'infinitude de l'ensemble des nombres premiers. Cette preuve repose sur un raisonnement par l'absurde, en effet, considérer le nombre constitué du produit de tous ces nombres premiers (supposés finis) plus un, nous procure l'absurdité recherchée. Aussi astucieux et surprenant qu'il soit, on peut toujours comprendre la raison derrière la rythmique et la construction du raisonnement mathématique. En l'occurrence, on comprend très bien que notre première note n'a pas été choisie au hasard, si on veut construire un nombre premier à partir d'un nombre fini de nombres premiers, il est naturel qu'il ne soit divisible par aucun d'eux, ni leur produits mutuels, donc un nombre plus grand que le produit

2. https://www.youtube.com/watch?v=eStW62CD3Yw

total correspondra, y ajouter juste 1 nous convient parfaitement.

On retrouve plusieurs exemples de cette musicalité harmonieuse et ingénieuse des mathématiques dans certaines solutions d'exercices olympiques, problèmes qui ouvrent généralement les portes même de la beauté et de la mélodie. C'est sûrement la présence de cette beauté musicale recherchée qui a donné naissance aux prix spéciaux aux OIM. En effet, des solutions qui sont spécialement élégantes ou ingénieuses peuvent recevoir un prix spécial de la part du jury de la compétition. On donnera l'exemple très connu d'Emanouil Atanassov qui a reçu un prix spécial pour sa solution au P6 en 1988, problème utilisant la Vieta Jumping, méthode qui a vu le jour grâce à ce problème et que tous ceux qui s'intéressent aux olympiades devraient connaître.

OIM 1988 P6 :

Soient a et b deux entiers tels que $ab+1$ divise a^2+b^2. Montrer que $\dfrac{a^2+b^2}{ab+1}$ est un carré parfait.

Solution. Considérons les entiers a, b, k tels que : $a^2+b^2 = k(ab+1)$. Pour un k fixé, on considère (a, b) le plus petit couple parmi tous ceux qui vérifient l'équation, et on note $a' = max(a, b)$ et $b' = min(a, b)$. On a donc $a'^2 - ka'b' + b'^2 - k = 0$ est une équation quadratique en a'. S'il existe une autre solution c', elle vérifie $b'c' \leq a'c' = b'^2 - k < b'^2 \implies c' < b'$. D'où c' n'est pas un entier positif (sinon on va contredire notre condition de minimalité). Mais on a $c' = b'k - a'$, donc c'est un entier ≤ 0. De plus $(a'+1)(c'+1) = a'c' + a' + c' + 1 = b'^2 - k + b'k + 1 = b'^2 + (b'-1)k + 1 \geq 1$, d'où $c' > -1$. On en conclut que $c' = 0$ et $k = b'^2$. Ceci étant vrai pour toute solution (a, b) et k fixé, on a notre résultat.

Problèmes

www.mathemaroc.com

Vol. 1, No. 5, 2018

Vol. 1, No. 5, 2018, pp. 30-32

Corrections du numéro précédent

Polynômes :

Problème 1 :

Factoriser l'expression suivante : $(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3)$

Solution :

Un développement de l'expression nous donne une expression plus compliquée. Nous allons donc essayer d'utiliser un argument polynômial. On regarde l'expression comme un polynôme en X.

$$P(X) = (X+b+c)^3 - (X^3+b^3+c^3)$$

Pour factoriser ce polynôme, il nous suffit donc d'en trouver les racines. On remarque alors que $P(-b) = P(-c) = 0$. En développant le polynôme, nous remarquons également qu'il est de degré 2. On a donc trouvé toutes les racines. On peut alors écrire :

$$P(X) = \lambda(X+b)(X+c)$$

On trouve enfin λ en calculant la valeur de $P(0)$. On en déduit alors l'expression factorisée en évaluant le polynôme en a :

$$(a+b+c)^3 - (a^3+b^3+c^3) = (a+b)(b+c)(c+a)$$

Problème 2 : (Maroc-MO 2012)

Trouver les polynômes $P(x)$ qui vérifient :

$$P(x+1) = P(x) + 2x + 1.$$

Solution :

Nous proposons deux méthodes.

Méthode 1 :

Soit n un entier naturel, on a : $P(n) - P(n-1) = 2n - 1$.

En sommant terme à terme les égalités pour : $k = 1, ..., n$ on obtient

$$P(n) - P(0) = \sum_{k=1}^{n} (2k - 1)$$

La dernière somme se calcule aisément [3] et vaut n^2. On en déduit que : $P(n) = n^2 + \lambda$ pour tout entier naturel n.

Les deux polynômes P et $x^2 + \lambda$ coïncident sur une infinité de valeurs, ils sont donc égaux (cela découle du fait que $P(x) - x^2 - \lambda$ admet une infinité de racines).

Les solutions sont donc de la forme $P(x) = x^2 + \lambda$ où λ est un réel quelconque. Réciproquement tout polynôme de cette forme satisfait l'équation fonctionnelle.

Méthode 2 :

Cette solution est bien plus astucieuse mais peut être donnée pour la beauté du raisonnement.

$$P(x + 1) = P(x) + 2x + 1 = P(x) - x^2 + (x^2 + 2x + 1)$$

Donc l'équation se réécrit

$$P(x + 1) - (x + 1)^2 = P(x) - x^2 \tag{1}$$

Considérons alors le polynôme : $Q(x) = P(x) - x^2$, (1) devient ainsi :

$$Q(x + 1) = Q(x)$$

On montre enfin que $Q(x)$ est constant (car $Q(x+1) - Q(x)$ admet une infinité de racines). Donc les polynômes cherchés sont de la forme : $x^2 + \lambda$.

Divers :

Exercice 1 [Manuel scolaire 1BAC page 230]

L'ensemble M est une partie de $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

i- $\mathbb{Z} \subset M$ *ii*- $(\forall x, y \in M) : x + y \in M, xy \in M$ $iii-$ $\sqrt{2} + \sqrt{3} \in M$

Montrez que :

$$\sqrt{12} \in M.$$

L'ensemble $M \subset \mathbb{R}$ étant stable par l'addition et $\mathbb{Z} \subset M$, on a alors :

3. Pour le lecteur qui n'a pas encore étudié les sommes de suite, cela découle du fait que $1 + 2 \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$$(\forall x \in M)(\forall n \in \mathbb{N}) : x - n \in M. \qquad (*)$$

Puisque :

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} \in M$$

Alors :

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = (\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 = 5 + 2\sqrt{6} \in M \text{ d'après } (ii)$$

Donc d'après (*) on obtient :

$$2\sqrt{6} \in M, \text{ or : } -1 \in \mathbb{Z} \text{ alors : } -2\sqrt{6} \in M$$

On en déduit que :

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 5 - 2\sqrt{6} \in M$$

En remarquant que :

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 1$$

Et en utilisant (ii), on a :

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} = (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 \in M$$

Finalement :

$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \in M.$$

Exercice 2 [Maroc-MO 2004]

On considère un pentagone régulier de côté a et de diagonale b.
Montrez que :

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} = 3.$$

On trace le point A' de sorte que : $\widehat{BCD} = \widehat{ACA'}$ et $CA = CA'$.

Les points A, D et A' sont allignés. En effet, on a : $\widehat{ADC} = \dfrac{2\pi}{5}$ et $\widehat{CDA'} = \widehat{CBA} = \dfrac{3\pi}{5}$. Les deux triangles ACA' et ABC sont semblables. Donc : $\dfrac{AA'}{AC} = \dfrac{BC}{CA'}$, c-à-d : $\dfrac{a+b}{b} = \dfrac{b}{a}$, donc : $\dfrac{b}{a} - \dfrac{a}{b} = 1$. En élevant au carré on obtient le résultat.