Wiskunde deel 1
Werkboek

ThiemeMeulenhoff

Colofon

Illustraties
Kre-add/Marcel Westervoorde,
Alphen a/d Rijn

Omslag
Eduardo Media

Opmaak
PPMP Prepress, Wolvega

Over ThiemeMeulenhoff
ThiemeMeulenhoff ontwikkelt zich van educatieve uitgeverij tot een learning design company. We brengen content, leerontwerp en technologie samen. Met onze groeiende expertise, ervaring en leeroplossingen zijn we een partner voor scholen bij het vernieuwen en verbeteren van onderwijs. Zo kunnen we samen beter recht doen aan de verschillen tussen lerenden en scholen en ervoor zorgen dat leren steeds persoonlijker, effectiever en efficiënter wordt.

Samen leren vernieuwen.

www.thiememeulenhoff.nl

ISBN 978 90 06 61718 4
Tweede druk, eerste oplage 2019

Deze uitgave is volledig CO_2-neutraal geproduceerd.
Het voor deze uitgave gebruikte papier is voorzien van het FSC®-keurmerk.
Dit betekent dat de bosbouw op een verantwoorde wijze heeft plaatsgevonden.

Inhoud

Les 1 De grote onbekende

Wie is de geheimzinnige Mr. X?
Deze vraag kom je misschien wel eens tegen in een spannend verhaal.
Er zijn dan meerdere verdachten. Omdat je nog niet weet wie de schuldige is, noem je hem (of haar) alvast maar X.
In het volgende voorbeeld is er ook een onbekende Mr. X.

1 Wie is Mr. X?
Er is een kostbaar beeldje gestolen. Op het politiebureau worden vijf verdachten vastgehouden. Uit onderzoek is gebleken dat een van deze vijf de dader is. In dat onderzoek speelden het huisnummer en de postcode van de verdachten een grote rol.
De rechercheur heeft twee belangrijke aanwijzingen gevonden.
Hieruit kun je afleiden wie van de vijf verdachten de schuldige Mr. X is.

Dit zijn de gegevens:

naam	*postcode*	*huisnummer*
J. de Schilder	7231 XY	18
B. van Platen	6231 XY	47
H. Ivoor	5231 XY	54
K. van der Steen	4231 XY	64
R. Kleiweg	3231 XY	93

Aanwijzing 1: Met de oneven cijfers uit de postcode van Mr. X kun je precies zes verschillende getallen tussen 100 en 1000 maken.

Aanwijzing 2: Als je het huisnummer van Mr. X optelt bij het huisnummer van een van de andere verdachten, dan krijg je het getal 111.

Weet jij wie het beeldje gestolen heeft, ofwel wie Mr. X is?
Aanwijzing 1 klopt alleen voor J. de Schilder en voor H. Ivoor.
Je hebt drie verschillende cijfers nodig om precies zes combinaties te maken.
Bijvoorbeeld 7231 geeft 137, 173, 317, 371, 713 en 731. De 2 telt niet mee, die is even. B. van Platen en K. van der Steen hebben maar twee oneven cijfers in de postcode, daar kun je maar twee combinaties mee maken.
R. Kleiweg heeft wel drie oneven cijfers, maar door de twee drieën zijn er maar drie verschillende mogelijkheden (133, 313 en 331).
Aanwijzing 2 klopt voor J. de Schilder en R. Kleiweg samen (18 + 93 = 111) en voor B. van Platen en K. van der Steen samen (47 + 64 = 111).
Alleen voor J. de Schilder gelden allebei de aanwijzingen (1 en 2).
Dus J. de Schilder is de schuldige Mr. X.

Bij dit voorbeeld moest de rechercheur goed rekenen om de onbekende schuldige te vinden.
In wiskundevraagstukken is er vaker een onbekende. (Maar dat hoeft geen schuldige te zijn!)

2 Hieronder staan tien zinnetjes in wiskundetaal. Letters geven een onbekend getal aan. Onder de zinnetjes staan alle 'verdachte' getallen, daar zitten de 'schuldige' getallen bij, maar ook 'onschuldige' getallen.
Aan jou de vraag om de 'misdaden' op te lossen, ofwel de juiste getallen bij de letters te zoeken. Welke verdachte getallen maken de zinnetjes kloppend?

$a + 24 = 80$	a = 56	$148 + b = 213$	b = 65
$30 - c = 29$	c = 1	$d - 11 = 66$	d = 77
$2 \times e = 60$	e = 30	$f \times 5 = 60$	f = 12
$297 : g = 9$	g = 33	$h : 4 = 14$	h = 56
$144 + 3 \times i = 300$ *	i = 52	$160 - (12 + j) = 78$ **	j = 70

Let op de juiste volgorde:
* vermenigvuldigen gaat voor optellen
** eerst wat tussen haakjes staat, dan pas aftrekken

Kies uit deze verdachte getallen:
1 – 3,5 – 7 – 12 – 15 – 18 – 30 – 33 – 52 – 53 – 55 – 56 – 65 – 66 – 70 – 75 – 77 – 120 – 153 – 351

Welk getal heb je twee keer ingevuld? Het getal 56 (a en h).

3 Sommige vraagstukjes staan nog niet in wiskundetaal, bijvoorbeeld:

Over negen jaar is Bart 21 jaar oud. Hoe oud is Bart nu?

Jij rekent vast snel uit dat Bart nu ***21 – 9 = 12*** jaar oud is.
In wiskundetaal is de leeftijd van Bart de onbekende, die geven we de letter **x**.
Voor **x** geldt nu: ***x + 9 = 21***, dus ***x = 21 – 9 = 12***.

Kun jij het volgende vraagstukje in wiskundetaal opschrijven?

De moeder van Bart was vijf jaar geleden 36 jaar.

Wat geldt er voor de leeftijd **y** van moeder? $y - 5 = 36$, $y = 36 + 5 = 41$

De moeder van Bart is 41 jaar.

4 Los ook het volgende vraagstukje op in wiskundetaal.

Vader is 48 jaar oud. Hij is drie keer zo oud als zijn zoon Ali.
Hoe oud is Ali?

De leeftijd van Ali noem je **a**.

Nu geldt: $48 = 3 \times a$

Dus Ali is 16 jaar.

5 Hoe los je het volgende probleem op?
Vader is 47 jaar. Over vijf jaar is hij twee keer zo oud als zijn dochter Cecile dan is.
Hoe oud is Cecile nu?
Noem de onbekende leeftijd van Cecile **c**. Kun je dit vraagstuk wiskundig oplossen?

Maak het verhaal compleet.

in gewone woorden	*in wiskundetaal*
vader is over vijf jaar 52 jaar	47 + 5 = 52
Cecile is dan ook vijf jaar ouder	**c** + 5
vader is dan twee keer zo oud als Cecile	52 = 2 × (**c** + 5)
Cecile is dan de helft van 52, dus 26	**c** + 5 = 52 : 2 = 26
Cecile is nu 26 min 5 is 21 jaar oud	**c** = 26 – 5 = 21

Lukt het jou ook om de volgende twee problemen (wiskundig) op te lossen?

6 Drie zussen zijn bij elkaar 99 jaar. De oudste zus is twee keer zo oud als de jongste zus.
De leeftijd van de middelste zus ligt precies tussen de twee andere leeftijden in.
Hoe oud zijn de drie zussen? De jongste zus is 22 jaar, de middelste 33 jaar en de oudste 44 jaar. Uitleg: Noem de leeftijd van de jongste zus bijvoorbeeld z. De andere leeftijden zijn dan $1\frac{1}{2}$ × z en 2 × z. Dan geldt z + $1\frac{1}{2}$ × z + 2 × z = 99, ofwel $4\frac{1}{2}$ × z = 99. Dan geldt ook 9 × z = 198. Dan geldt: z = 198 : 9 = 22.

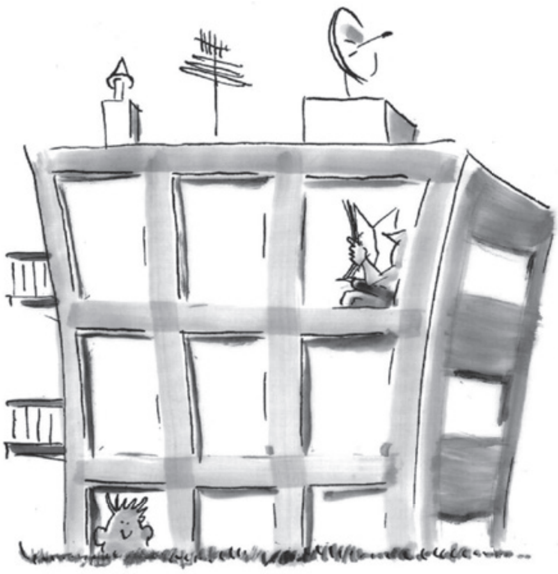
7 25 jaar geleden waren opa en vader samen 49 jaar. Nu is vader precies half zo oud als opa.
Hoe oud zijn vader en opa nu? Vader is nu 33 jaar en opa is 66 jaar. Uitleg: Noem de leeftijd van vader p. Nu is vader precies half zo oud als opa. Dus de leeftijd van opa is 2 × p. 25 jaar geleden waren opa en vader samen 49 jaar. Nu zijn ze allebei 25 jaar ouder. Nu zijn opa en vader dus samen 49 + 50 = 99 jaar. Ofwel p + 2 × p = 99, 3 × p = 99, dus p = 99 : 3 = 33.

Les 2 Negatieve getallen deel 1

Het plaatsje Flatstad is bekend om haar bijzondere flatgebouwen.
Deze gebouwen zijn namelijk voor een deel ondergronds.
Of er nu onder de grond mensen wonen die zelf het daglicht niet kunnen verdragen, of dat ze daar dingen doen die het daglicht niet kunnen verdragen, is niet bekend.
Maar het geeft wel een prima aanleiding om negatieve getallen te behandelen.

Vooral de liftbediendes moeten natuurlijk goed kunnen rekenen met getallen onder 0.
Als iemand naar verdieping 3 moet, dan is het van belang om te weten of dat boven (+3) of onder de grond (–3) is.
*De getallen onder 0 (zoals **–3**) worden **negatieve getallen** genoemd, er staat een – voor.*
*Getallen boven 0 (zoals **+3**, meestal zeggen we **3**) worden **positieve getallen** genoemd.*

verdieping	8	Fam. Van Agt
verdieping	7	Mw. Zeuven
verdieping	6	Dhr. Van Boven
verdieping	5	
verdieping	4	
verdieping	3	
verdieping	2	Mw. Zondag
verdieping	1	
verdieping	0	Dhr. en Mw. Vlak
verdieping	–1	
verdieping	–2	Dhr. Duister
verdieping	–3	
verdieping	–4	Fam. Van Onderen
verdieping	–5	Mw. Van Dalen
verdieping	–6	



1 Hierboven zie je het namenbord van één van de flats.
Vul de onderstaande namen in op de goede plaats.

- Mevrouw Van Dalen woont op de vijfde verdieping onder de begane grond.
- De heer Van Boven woont op etage zes met uitzicht op een bos.
- De heer Duister woont drie verdiepingen hoger dan mevrouw Van Dalen.
- Mevrouw Zondag woont op een verdieping precies tussen de heren Van Boven en Duister in.

Om te vinden op welke verdieping meneer Duister woont, moest je een rekensom maken.
Drie verdiepingen hoger dan mevrouw Van Dalen:

–5 + 3 = –2

De liftbediendes moeten dit soort opdrachten perfect kunnen uitvoeren.
+3 betekent voor de lift een **stijging** van **3** verdiepingen,
–3 betekent een **daling** van **3** verdiepingen.

2 Op de volgende pagina bovenaan zie je nog eens het namenbord, maar nu met de eerder genoemde namen ingevuld. De rest van de namen kun je vinden door goed te kijken naar de volgende opdrachten voor de liftbediendes. De mensen die in de lift stappen, komen van hun woning af en de mensen die uitstappen, gaan naar hun woning. Behalve als er een andere aanwijzing staat.
De lift begint op verdieping 0 (begane grond).
Vul de namen in op het bord en maak de sommen die erbij horen.

verdieping 8	Fam. Van Agt
verdieping 7	Mw. Zeuven
verdieping 6	Dhr. Van Boven
verdieping 5	Mw. Kruin
verdieping 4	Fam. Kwartet
verdieping 3	Fam. Vogels
verdieping 2	Mw. Zondag
verdieping 1	Mw. Slot
verdieping 0	Dhr. en Mw. Vlak
verdieping –1	Fam. Schemer
verdieping –2	Dhr. Duister
verdieping –3	Dhr. tussenin
verdieping –4	Fam. Van Onderen
verdieping –5	Mw. Van Dalen
verdieping –6	Fam. Dieper

De liftbediende krijgt opdracht **–1**.
Daar aangekomen stapt familie Schemer uit.
Van daaruit krijgt de liftbediende opdracht **+4**.
Hier stapt familie Vogels in de lift.
Vervolgens gaat de lift naar verdieping **–3**.
a is hier de onbekende, welk getal moet je voor **a** invullen?

De lift gaat dus 6 verdiepingen omlaag.

0 **– 1** = –1

–1 **+ 4** = 3

3 – a = **–3**
a = 6

Op verdieping –3 stapt mevrouw Kruin uit.
Zij gaat op bezoek bij de heer Tussenin.
Zelf woont zij acht verdiepingen hoger dan haar gastheer.
Op welke verdieping woont mevrouw Kruin?

Mevrouw Kruin woont op verdieping 5

–3 + 8 = 5

De lift gaat vanuit verdieping –3 naar de onderste verdieping.
Daar stapt familie Dieper in. Zij zijn op weg naar familie Kwartet voor hun wekelijkse kaartavond. De liftbediende krijgt opdracht **+10**.

Familie Kwartet woont dus op verdieping 4

–3 – 3 = –6

–6 **+ 10** = 4

Nadat familie Dieper is uitgestapt, gaat de lift naar de eerste verdieping.
Daar geeft de ingestapte mevrouw Slot de liftbediende een opdracht.

Zij wil naar verdieping –6 gaan. Welke opdracht geeft zij? –7
Welk getal moet je voor b invullen?

4 – 3 = **1**

1 – b = **–6**
b = 7

3 Tot slot nog een puzzel voor de pientere liftbediende. Alle getallen vanaf –6 tot en met 8 moeten precies één keer ingevuld worden. Vul deze vijftien getallen op de juiste plaats in.

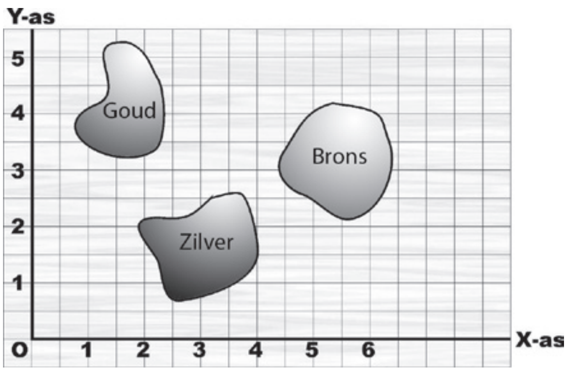
4 – a = –4 a = 8	e + 5 = 2 e = –3	–1 + i = j i = 1 en j = 0
3 – b = –2 b = 5	–4 + f = –5 f = –1	6 – k = 0 k = 6
c – 3 = –1 c = 2	g + h = 0 g = 4 en h = –4	m + 3 = n m = –5 en n = –2
d + 5 = –1 d = –6	of g = –4, h = 4	p – q = –4 p = 3 en q = 7

Les 3 Assenstelsels

Je kent vast wel puzzels waarbij je met behulp van ***coördinaten*** *iets moet vinden op een kaart.*
Er zijn kaarten die werken met letters en cijfers, zoals een atlas of een schaakbord.
Er zijn ook kaarten die enkel met cijfers werken.
Het is dan natuurlijk wel belangrijk om te weten wat de getallen betekenen.

De volgende afspraken maken duidelijk of een coördinaat bij een horizontale as hoort (de x-as) of bij een verticale as (de y-as).
De eerste coördinaat in een getallenpaar geeft de horizontale ligging aan, dat is de ***x-coördinaat****.*
De tweede coördinaat in een getallenpaar geeft de verticale ligging aan, dat is de ***y-coördinaat****.*

1 Op welk eiland heeft piraat Nelson zijn schat begraven?



figuur 1

Piraat Nelson heeft op een van de drie eilanden van figuur 1 een schat begraven.
Hij heeft slechts één aanwijzing achtergelaten: op de plek waar de schat ligt, is de x-coördinaat precies even groot als de y-coördinaat.

De schat is begraven op eiland Zilver. Daarop ligt het getallenpaar (2,2).

2 Waar liggen de volgende getallenparen? (2,4) (3,2) (1,4) (5,3) (3,1) (2,3) (6,4) (2,2) $(1,3\frac{1}{2})$ $(3,1\frac{1}{2})$

Op eiland Goud liggen: (2,4) (1,4) $(1,3\frac{1}{2})$

Op eiland Zilver liggen: (3,2) (3,1) (2,2) $(3,1\frac{1}{2})$

Op eiland Brons liggen: (5,3) (6,4)

In het water ligt: (2,3)

Bij elk getallenpaar hoort een punt in de figuur. Een punt kan ook op een van de assen liggen.
Bovendien zie je in deze opgave dat niet alleen de gehele getallen gebruikt worden.

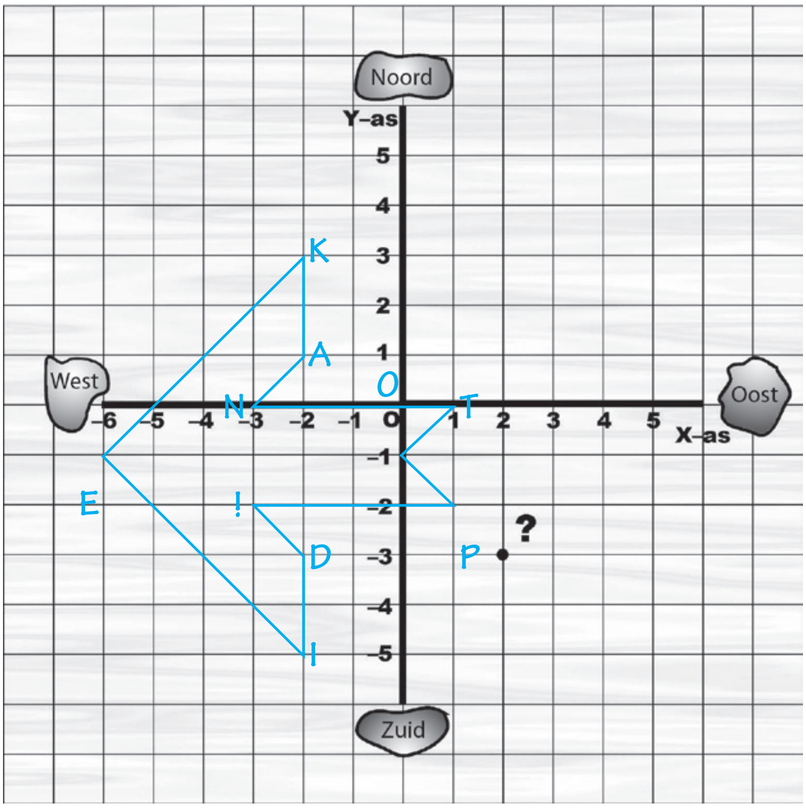
3 Bij welk eiland ligt het punt (0,4) het dichtst? Het punt (0,4) ligt op de y-as, het ligt het dichtst bij eiland Goud.

Op welk eiland ligt $(5\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4})$? $5\frac{1}{2}, 3\frac{1}{4}$ ligt op eiland Brons.

De figuur die getekend is met een x-as en een y-as noemen we een **assenstelsel**. Linksonder is het getallenpaar (0,0). Dat punt heet de oorsprong O. Punten in de figuur zijn vanuit de oorsprong snel te vinden.
Het punt (2,5) bereik je door twee stappen naar rechts te gaan en vervolgens vijf stappen omhoog.

De oorsprong kan in het centrum van een groter assenstelsel liggen. In zo'n groter assenstelsel liggen ook getallenparen met negatieve getallen. Een slimme piraat werkt graag met negatieve getallen. In de volgende opdrachten kun je daarmee oefenen.

4 Welk getallenpaar hoort bij het vraagteken in figuur 2?
Is dat punt (–3,2), (3,–2), (–2,3) of (2,–3)? (2,–3)



figuur 2

5 Piraat Nelson heeft nog een schat begraven op een van de vier getekende eilanden.
Op welk eiland heeft piraat Nelson deze schat begraven?
Als je de volgende opdracht goed uitvoert, vind je de aanwijzing die je nodig hebt.

Teken alle punten in het assenstelsel en zet bij ieder punt de letter.

T = (1,1)	O = (0,0)	P = (1,–1)	! = (–3,–1)	D = (–2,–2)
I = (–2,–4)	E = (–6,0)	K = (–2,4)	A = (–2,2)	N = (–3,1)

Trek vervolgens lijnen: van A naar N, van N naar T, van T naar O, van O naar P, van P naar !, van ! naar D, van D naar I, van I naar E, van E naar K en ten slotte een lijn van K naar A. Zowel de figuur die ontstaat als de letters in de goede volgorde geven je de aanwijzing op welk eiland de schat ligt. (Wel met de goede letter beginnen!)

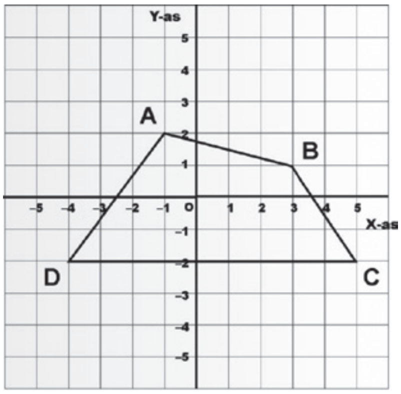
De schat ligt op eiland: West (DIE KANT OP!)

Les 4 Vierhoeken

In de vorige les heb je kennisgemaakt met assenstelsels.
In een assenstelsel kun je wiskundige figuren tekenen door punten met elkaar te verbinden.
In deze les ga je op zoek naar 5 vierhoeken. Een vierhoek is een vlakke figuur die ingesloten wordt door vier rechte lijnen. Bij de vierhoek in figuur 1 zijn dat de lijnstukken tussen A, B, C en D.
Vierhoek ABCD is onregelmatig.

1 Welke getallenparen zijn verbonden in de vierhoek van figuur 1?

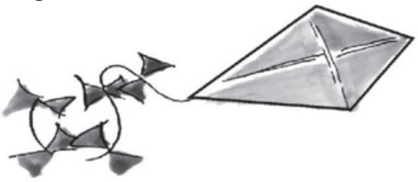
A = (−1 , 2) B = (3 , 1) C = (5 , −2) D = (−4 , −2)



figuur 1

Hieronder staan vijf voorbeelden van regelmatige vierhoeken met eigenschappen waaraan je ze kunt herkennen.

- Bij een vlieger zijn twee aan twee de aangrenzende zijden even lang.

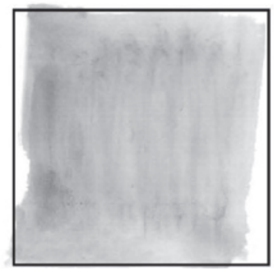


- Bij een parallellogram hebben steeds de twee tegenoverliggende zijden dezelfde richting (die zijden zijn parallel). Bovendien zijn de tegenoverliggende zijden even lang.

- Bij een ruit zijn alle zijden even lang.

- Bij een rechthoek zijn alle vier de hoeken recht (90 graden).

- Bij een vierkant zijn alle hoeken recht en alle zijden even lang.



Let op!
Een vierhoek kan bij meerdere groepen horen.
Elk vierkant is bijvoorbeeld een rechthoek.
Maar niet iedere rechthoek is een vierkant!

2 Ontdek de vijf vierhoeken in het assenstelsel.
In het assenstelsel op deze bladzijde zitten vijf vierhoeken verstopt.
Bij elke vierhoek zijn de letters van de naam van de vierhoek verdeeld over de vier hoekpunten van die vierhoek. Van drie van de vier hoekpunten zijn de coördinaten gegeven.

De volgende coördinaten zijn gegeven met de bijbehorende letters:

(–7,6) htho	(–5,–9) ieg	(–2,3) k	(3,1) lello	(7,1) paral
(4,–9) r	(–5,–1) r	(9,6) ram	(–7,3) rec	(–2,2) rka
(6,–5) t	(2,–2) t	(2,–5) u	(–2,–2) vie	(–2,–3) vl

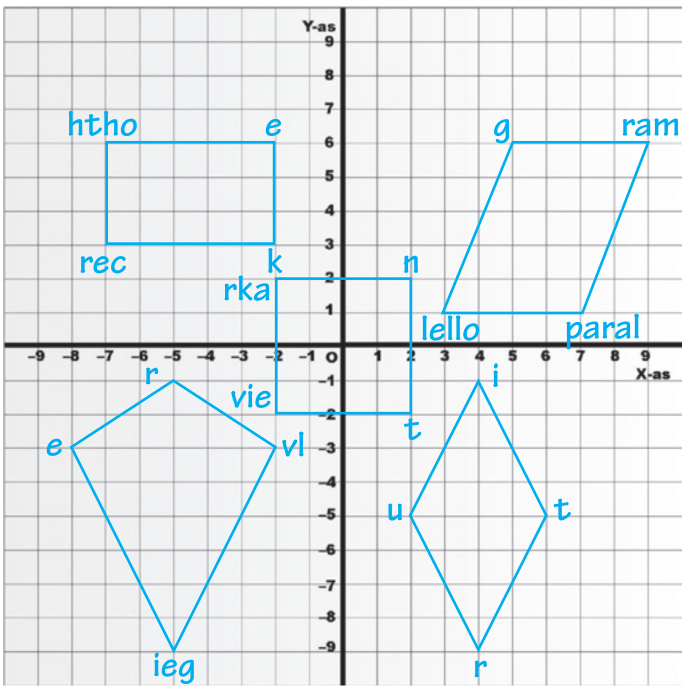
Wat moet je doen?
Teken de gegeven hoekpunten (met een stip) in het assenstelsel.

Zoek het vierde hoekpunt van elke vierhoek en teken de vierhoek in het assenstelsel.
Maak daarbij gebruik van de eigenschappen die eerder genoemd zijn.
Schrijf hieronder de coördinaten van elk vierde hoekpunt.

rechthoek	parallellogram	ruit	vlieger	vierkant
(–2 , 6)	(5 , 6)	(4 , –1)	(–8 , –3)	(2 , 2)

Als je dit doet, zul je merken dat je bij elk vierde hoekpunt een letter kunt schrijven om de naam van die vierhoek compleet te maken.

Zet die letter bij het hoekpunt en vul die letter in op een van de open plaatsen in de letterbalk onder aan de bladzijde.



Vul de ontbrekende letters op de goede plaats in en vind zo een ander woord voor parallel.

e	v	e	n	w	i	j	d	i	g

Toets 1

1 Een grote winkel houdt een prijsvraag. Bij de kassa staat een pot met dropjes. Voor € 0,25 mogen klanten raden hoeveel dropjes er in de pot zitten. De klant met de beste schatting krijgt de dropjes. De eerste vijf klanten die meedoen aan de prijsvraag zijn:

Mevrouw Korting	200 dropjes
Meneer Koopjes	100 dropjes
Meneer Winkels	136 dropjes
Mevrouw Wisselgeld	119 dropjes
Mevrouw Kassa	**w** dropjes

a Mevrouw Kassa is **k** jaar oud.
Haar leeftijd heb je bij opdracht 1b nodig.
Voor die leeftijd **k** geldt: $2 \times \mathbf{k} + 18 = 100$.
Hoe oud is mevrouw Kassa?

Mevrouw Kassa is $2 \times k + 18 = 100$ $\quad 2 \times k = 100 - 18 = 82$ $\quad k = 82 : 2 = 41$

41 jaar.

b Mevrouw Kassa zegt: 'Als ik van mijn schatting **w** mijn leeftijd aftrek, dan krijg je de schatting van mevrouw Wisselgeld.'

Schrijf deze som op in wiskundetaal: $w - 41 = 119$

Hoe groot is w? **w** = $119 + 41 = 160$

Winkelbediende Dirk heeft alle dropjes geteld en in de pot gedaan.
Hij houdt wel van een raadseltje. Daarom verklapt hij: 'Ik noem het goede aantal dropjes **d**.
Als ik bij **d** er 19 bij doe, dan heb ik de helft van wat mevrouw Korting en meneer Winkels samen geraden hebben.'

c Bereken **d** in wiskundetaal.

d = $d + 19 = (200 + 136) : 2$ $\quad d + 19 = 336 : 2 = 168$ $\quad d = 168 - 19 = 149$

d Wie van de vijf genoemde klanten heeft de beste schatting gemaakt? Mevrouw Kassa zit met 160 dropjes het dichtst bij 149 dropjes.

2 Liftbediende Jolien doet vandaag haar theorie-examen.
Geef de antwoorden op de volgende vragen uit het examen.

a Naar welke verdieping gaat de lift?

$14 - 16 =$ −2

$16 - 24 =$ −8

$-25 + 12 =$ −13

$-10 + 10 =$ 0

$-19 + 34 =$ 15

b Welke liftopdracht wordt er gegeven?

$-12 + a = -7$ $\quad$ a = 5

$-12 + b = 7$ $\quad$ b = 19

$-7 - c = -10$ $\quad$ c = 3

$21 + d = 12$ $\quad$ d = −9

c Vanaf welke verdieping vertrekt de lift?

$e - 14 = -7$ $\quad$ e = 7

$f + 28 = 19$ $\quad$ f = −9

$g + 12 = -3$ $\quad$ g = −15

$h + 31 = 1$ $\quad$ h = −30

3 In deze opgave moet je in het assenstelsel vier vierhoeken tekenen.
In de volgende opdrachten vind je de aanwijzingen die je nodig hebt.

a Schrijf de coördinaten op van B, E, H en K.

B = (4 , 4) E = (4 , −4) H = (−4 , −4) K = (−4 , 4)

b De oorsprong O en B zijn tegenoverstaande hoekpunten van een vierkant.
Teken vierkant OABC en schrijf de coördinaten op van A en C.
De letters van elke vierhoek zijn steeds rechtsom geplaatst, dus A ligt op de y-as.

A = (0 , 4) C = (4 , 0)

c De oorsprong O en E zijn hoekpunten van ruit ODEF.
De coördinaten van hoekpunt D zijn (3,–1).
Teken ruit ODEF en schrijf de coördinaten op van F.

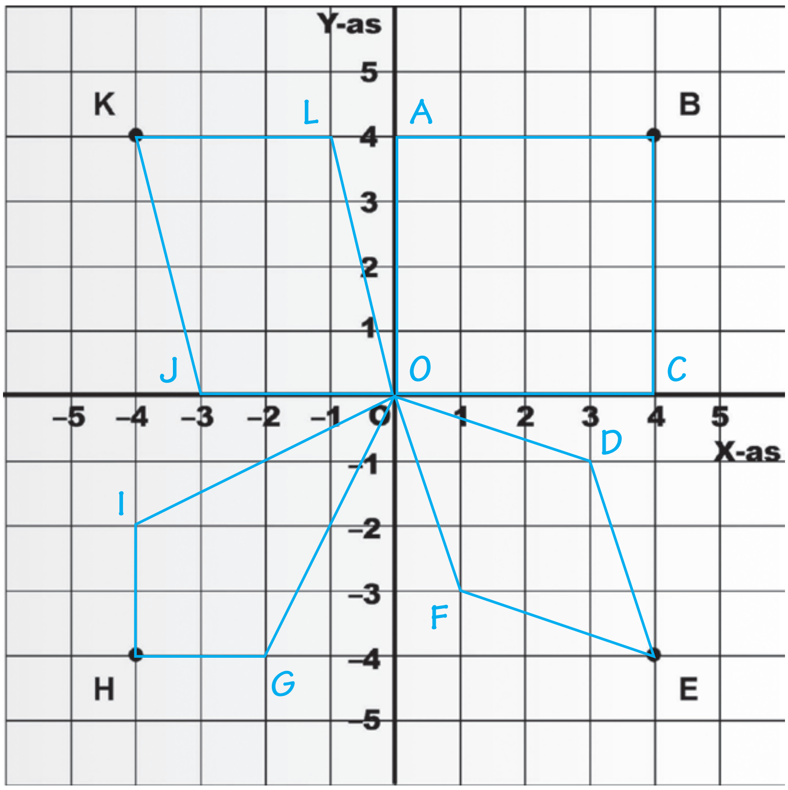
F = (1 , −3)

d De oorsprong O en H zijn hoekpunten van vlieger OGHI.
Hoekpunt I ligt midden tussen H en het punt (–4,0).
Teken vlieger OGHI en schrijf de coördinaten op van G en I.

G = (−2 , −4) I = (−4 , −2)

e De oorsprong O en K zijn hoekpunten van parallellogram OJKL.
Zijde KL loopt horizontaal en heeft lengte 3.
Teken parallellogram OJKL en schrijf de coördinaten op van J en L.

J = (−3 , 0) L = (−1 , 4)



Les 5 Twee onbekenden

In Les 1 was er steeds sprake van één onbekende, de geheimzinnige Mr. X. Het komt ook voor dat je te maken krijgt met twee onbekenden. Kijk maar eens naar het volgende voorbeeld.

1 Wie zijn Mr. X en Mr. Y?
Deze keer is er een kostbaar schilderij gestolen.
Uit getuigenverklaringen maakt de politie op, dat deze diefstal het werk is van twee mannen. Op het politiebureau worden nog de vijf verdachten uit Les 1 vastgehouden. Uit onderzoek is gebleken dat twee van deze vijf mannen de daders zijn.
In het onderzoek speelden weer het huisnummer en de postcode van de verdachten een grote rol. De rechercheur heeft weer twee belangrijke aanwijzingen gevonden.
Hieruit kun je afleiden wie van de vijf verdachten dit keer de schuldigen zijn.

Dit zijn de gegevens:

naam	*postcode*	*huisnummer*
J. de Schilder	7231 XY	18
B. van Platen	6231 XY	47
H. Ivoor	5231 XY	54
K. van der Steen	4231 XY	64
R. Kleiweg	3231 XY	93

Aanwijzing 1: Het verschil tussen de getallen uit de postcodes van de twee daders is niet groter dan 3000.

Aanwijzing 2: Als je het huisnummer van de ene dader optelt bij het huisnummer van de andere dader, krijg je het getal 111.

Weet jij welke twee mannen het schilderij gestolen hebben, ofwel wie Mr. X en Mr. Y zijn?

B. van Platen en K. van der Steen zijn de schuldigen.

Uitleg: Aanwijzing 1 kan niet kloppen voor J. de Schilder en R. Kleiweg samen.
7231 – 3231 = 4000.
Aanwijzing 2 klopt voor J. de Schilder en R. Kleiweg samen (18 + 93 = 111)
en voor B. van Platen en K. van der Steen samen (47 + 64 = 111). Alleen voor
B. van Platen en K van der Steen samen gelden beide aanwijzingen (1 en 2).

Ook in wiskundevraagstukken kun je meerdere onbekenden tegenkomen.
Zo ook in het volgende probleem.

2 Opa is 26 jaar ouder dan vader. Opa en vader zijn nu samen 100 jaar.
Kun jij berekenen hoe oud opa en vader nu zijn?

Kun jij dit probleem oplossen?
Het is mogelijk dat je door handig combineren en uitproberen het goede antwoord weet te vinden. Dat zou al heel knap zijn.
Maar werkt zo'n manier altijd?
Er zijn verschillende wiskundige manieren om het probleem op te lossen.
In deze les laten we er één van zien. Die manier kun je heel vaak gebruiken.

Net als in Les 1 geven we de onbekenden een letter (in dit geval zijn de leeftijden onbekend).
We noemen de leeftijd van opa x en de leeftijd van vader y.
Nu schrijven we de aanwijzingen in wiskundetaal.

1. Opa is 26 jaar ouder dan vader $\longrightarrow$ $\mathbf{x = y + 26}$
2. Opa en vader zijn nu samen 100 jaar $\longrightarrow$ $\mathbf{x + y = 100}$

Nu is natuurlijk de vraag: hoe vind je x en y?

In regel 1 staat dat x hetzelfde is als $y + 26$ $\longrightarrow$ $\mathbf{x = y + 26}$

In regel 2 vervangen we die x door $y + 26$ $\longrightarrow$ $\mathbf{x + y = 100}$ **wordt** $\mathbf{y + 26 + y = 100}$

Dat kun je ook zo schrijven $\longrightarrow$ $\mathbf{y + y + 26 = 100}$

Aan beide kanten 26 eraf halen, geeft $\longrightarrow$ $\mathbf{y + y = 100 - 26}$

Als $y + y = 74$, dan is y de helft van 74 $\longrightarrow$ $\mathbf{y = 74 : 2 = 37}$

Hoe vind je nu x? $\longrightarrow$ $\mathbf{x = y + 26 = 37 + 26 = 63}$

Opa is 63 jaar en vader is 37 jaar.

Hoe los jij nu het volgende probleem op?

3 25 jaar geleden waren opa en zijn andere zoon, oom Pim, samen 49 jaar.
Nu is oom Pim precies half zo oud als opa.
Hoe oud zijn oom Pim en opa nu? zie tekst

Dit is weer een probleem met twee onbekenden.
Lees pas verder als je het hebt opgelost of als je er niet zelf uitkomt.

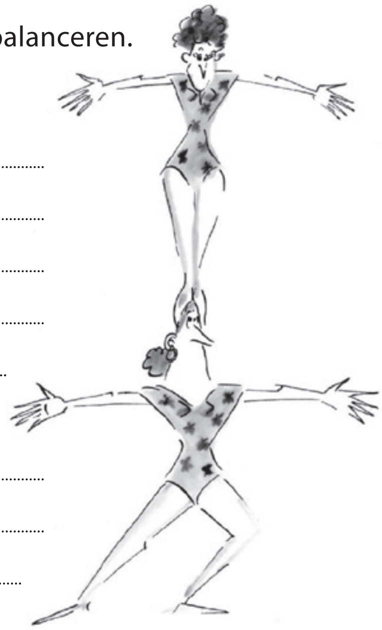
In Les 1 werd deze opgave als pittige afsluiter gepresenteerd. Een mogelijke oplossing is de volgende.
We noemen de leeftijd van oom Pim **p** en die van opa **q**.

Er geldt	$p + q = 99$	(nu zijn opa en oom Pim samen $49 + 2 \times 25 = 99$)
Ook geldt	$q = 2 \times p$	(opa is twee keer zo oud als oom Pim)
Dan geldt	$p + 2 \times p = 99$	(je mag q in de eerste regel vervangen door $2 \times p$ uit de tweede)
Ofwel	$3 \times p = 99$	($1 \times p + 2 \times p = 3 \times p$)
Dus	$p = 99 : 3 = 33$	

Oom Pim (p) is 33 jaar en opa (q) is $2 \times 33 = 66$ jaar.

Als je dit snapt, dan ben je al goed op weg in wiskundig redeneren.
Kun jij de volgende problemen ook wiskundig oplossen?

4 Loes en Fatima zijn twee acrobaten. Fatima kan op het hoofd van Loes balanceren. Samen zijn zij 2,80 meter lang. Loes is 20 centimeter langer dan Fatima. Hoe lang is Loes en hoe lang is Fatima?



Stel dat Loes en Fatima even lang waren, dan waren ze beiden 2,80 m : 2 = 1,40 m lang. De 20 centimeter verschil moet eerlijk verdeeld worden. Loes is de grootste van de twee, dus Loes is 10 cm langer dan 1,40 m; zij is 1,50 m. Fatima is 10 cm korter dan 1,40 m; zij is 1,30 m.

5 Twee boeren mogen samen 1.800 euro verdelen. Boer Vee heeft vier keer zoveel koeien als boer Melk. Daarom krijgt boer Vee ook vier keer zoveel geld als boer Melk.

Hoeveel geld krijgt ieder? Boer Melk krijgt 1 x 360 = € 360,- en boer Vee krijgt 4 x 360 = € 1.440,-. Uitleg: We noemen het bedrag voor boer Melk m en het bedrag voor boer Vee v. Dan geldt: m + v = 1.800 En ook geldt: v = 4 x m Als je v in de eerste regel vervangt door 4 x m, dan krijg je: m + 4 x m = 1.800 m + 4 x m = 5 x m, dus 5 x m = 1.800 Dan geldt: m = 1.800 : 5 = 360

Les 6 Negatieve getallen deel 2

In de flat uit Les 2 zijn op één dag twee computers gestolen. Mevrouw Van Dalen en meneer Van Agt hebben beiden op 30 april aangifte gedaan bij de politie. De politie onderzoekt mogelijke sporen en heeft daarbij de hulp van enkele slimme liftbediendes. Deze bediendes hebben een systeem ontworpen waarbij alle opdrachten voor de liftbediendes terug te lezen zijn. Het systeem werkt met codes. Een code is een opdrachtenreeks die begint op de begane grond (verdieping 0) en eindigt op de begane grond. Kijk naar de twee voorbeelden in de tabellen. Bij elke tabel hoort een code.

code [–4/–2/+5/+1] op 30-04 / 13:26 uur			
van verdieping	opdracht	naar verdieping	som
0	–4	–4	0 – 4 = –4
–4	–2	–6	–4 – 2 = –6
–6	+5	–1	–6 + 5 = –1
–1	+1	0	–1 + 1 = 0

code [+7/–2/–8/+2/+1] op 30-04 / 13:31 uur			
van verdieping	opdracht	naar verdieping	som
0	+7	7	0 + 7 = 7
7	–2	5	7 – 2 = 5
5	–8	–3	5 – 8 = –3
–3	+2	–1	–3 + 2 = –1
–1	+1	0	–1 + 1 = 0

1 Je kunt zien dat de code van 13:26 uur klopt. De berekeningen zijn in orde en de code begint met en eindigt op 0. De code van 13:31 uur klopt ook. Kun jij die tabel verder invullen?
Als een code niet op 0 uitkomt, dan is dat verdacht. De politie neemt aan dat er in zo'n geval één opdracht uitgewist is.

2 Kijk naar de volgende code. Klopt deze code? Eindigt de code op 0?

[+6/–10/–2/+3/+5/–1/+4/+3/–1]

0 + 6 – 10 – 2 + 3 + 5 – 1 + 4 + 3 – 1 = 7

De code klopt niet, want hij eindigt niet op 0. De code komt wel op 0 uit, als de opdracht –7 erin wordt gezet. Volgens de politie is het belangrijk uit te zoeken tussen welke twee opdrachten de opdracht –7 heeft gestaan.

De code waar het om gaat, is namelijk van 30 april 13:59 uur. Op die dag om 15:00 uur ontdekte mevrouw Van Dalen dat haar computer gestolen was. De rechercheur vermoedt dat de dader de liftopdracht van zijn of haar eigen huis naar de woning van mevrouw Van Dalen heeft uitgewist.

3 Als je ervan uitgaat dat het vermoeden van de politie juist is, op welke verdieping moet dan de opdracht –7 uitkomen? Op verdieping –5, waar mevrouw Van Dalen woont. Daar ging de dader naartoe.

4 Tussen welke twee opdrachten in de code stond dan de opdracht –7? Tussen de opdrachten +5 en –1. Opdracht +5 komt uit op verdieping 2. Als dan de opdracht –7 komt, gaat de lift naar verdieping –5, de verdieping waar mevrouw Van Dalen woont. Je kunt ook terugrekenen vanaf het einde van de code. Je vindt dan dat de lift op verdieping –5 is, als de eerste keer opdracht –1 wordt gegeven.

5 Van welke verdieping kwam de vermoedelijke dader? Van verdieping 2.

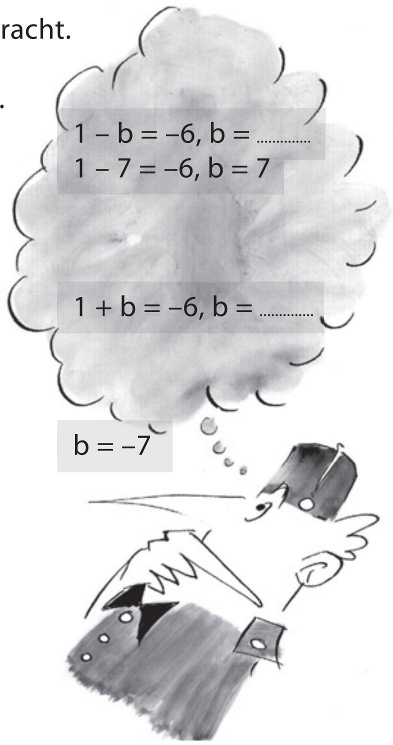
Wie geldt er dus als verdachte van de diefstal? Dat maakt mevrouw Zondag tot verdachte.

Op 30 april klopte nog een code niet. Om die code te kunnen lezen, moet je eerst nog iets meer weten over de opdrachten voor liftbediendes. Als je de volgende oefening foutloos kunt maken, weet je waarschijnlijk al genoeg. Is dat niet zo, lees dan eerst de tekst eronder.

6 Even een oefening voor liftbediendes in hogere en diepere flatgebouwen.
Naar welke verdieping moet de lift in de volgende gevallen:

18 + –5 = 13	–1+ –3 = –4	9 – –6 = 15	3 + –6 = –3	0 + –12 = 12	–4 – –10 = 6

Aan het eind van Les 2 gaf mevrouw Slot de liftbediende een opdracht.
De lift was op de eerste verdieping.
Daar geeft de ingestapte mevrouw Slot de liftbediende een opdracht.
Zij wil naar verdieping –6 gaan. Welke opdracht geeft zij?
Het antwoord luidde: mevrouw Slot geeft de opdracht –7.
In diezelfde opdracht had **b** ook een andere rol kunnen hebben.
Mevrouw Slot wil van verdieping 1 naar verdieping –6 gaan.
Welke opdracht geeft zij?
Mevrouw Slot geeft natuurlijk dezelfde opdracht: –7.
Maar welk getal moet je in deze som voor **b** kiezen?
Nu komt de opdracht –7 overeen met het getal dat je moet invullen voor **b**:
Voor een liftbediende betekent 1 + –7, ook wel 1 + (–7), hetzelfde als 1 – 7.



1 + 7	betekent:	vanaf verdieping 1 maak je een stijging van 7 verdiepingen
1 + –7	is hetzelfde als 1 – 7:	vanaf verdieping 1 maak je een daling van 7 verdiepingen

7 Wat zal de opdracht 1 – –7 betekenen? Een daling van –7 verdiepingen; dat komt neer op een stijging van 7 verdiepingen. Dus 1 – –7 = 1 + 7 = 8.

Als je op de goede manier redeneert, dan vind je 8 als antwoord. Heb jij het goede antwoord?
Nu terug naar het politieonderzoek.

8 Welke code klopt er niet? Wat komt niet uit op 0?
30 april / 14:09 uur [–3/+ –5/+6/–1/– –3] goed / ~~fout~~

30 april / 14:17 uur [–3 /– –10/–3/–5/+1] goed / ~~fout~~

30 april / 14:26 uur [–3/+4/– –1/–7/+ –5/– –4] ~~goed~~ / fout

De code van 14:26 uur komt uit op –6 en klopt dus niet. De andere twee codes zijn wel goed.

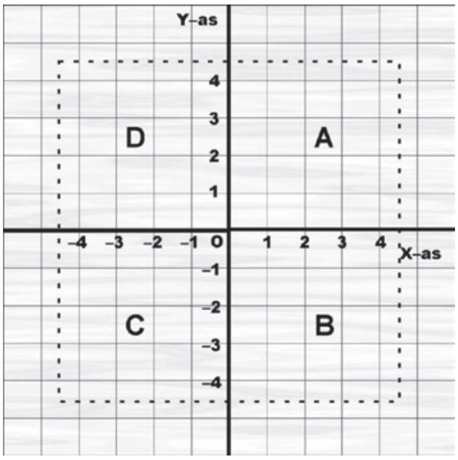
9 Twee diefstallen op 30 april en twee codes die niet kloppen. De verdachte die je bij de eerste diefstal vond, is inderdaad schuldig. Ook de tweede diefstal is door deze persoon gepleegd.

Ben jij nu in staat om de foute code van opdracht 8 kloppend te maken? ....

[–3 /+ 4 / – –1 / + 6 /- 7 / + –5 / – –4] Mevrouw Zondag gaat bij +6 van verdieping 2 (waar zij woont) naar verdieping 8, waar familie Van Agt woont. Daar vindt de tweede diefstal plaats.

Les 7 Het assenstels(p)el

Ayla, Benjamin, Celim en Dorien hebben iedere dinsdag na de wiskundeles een tussenuur.
Tot voor kort maakten ze in dat uur alvast hun huiswerk.
Na de eerste les waarin het assenstelsel behandeld werd, veranderde dat. Benjamin bedacht het Assenstels(p)el.



Het spel gaat zo.
Het assenstelsel is een grote zee.
Elke speler krijgt daarin een eigen vak.
Binnen dat vak mag elke speler drie kanonneerboten plaatsen.
De boten moeten binnen de stippellijnen liggen, niet op de x-as of de y-as, maar wel op punten met hele getallen als coördinaten.

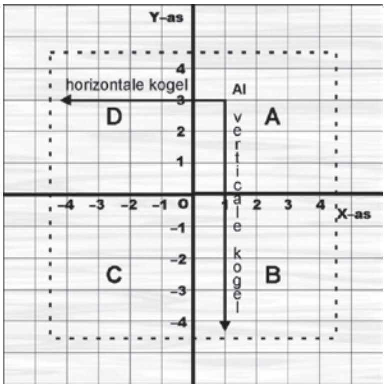
Zulke punten noemen we roosterpunten.

1 Hoeveel roosterpunten zijn er binnen ieder vak? Per vak zijn er 4 x 4 =16 roosterpunten.

Elke speler heeft een eigen ruitjesblaadje en tekent daarop het assenstelsel.
Elke speler tekent in zijn eigen assenstelsel de drie punten waar hij de boten plaatst.
Dit moet geheim blijven voor de andere spelers.
De boten krijgen een naam. De boten van Ayla heten Ayla I, Ayla II en Ayla III, in het assenstelsel afgekort tot AI, AII en AIII.

De bedoeling van het spel is om met kanonschoten boten van tegenstanders uit te schakelen.
De spelers mogen om beurten één kogel afvuren vanaf een van de eigen boten.
Dat kan op twee manieren: horizontaal of verticaal in de richting van een van de tegenstanders.
Als een kogel een vijandelijke boot raakt, zinkt die boot. Die boot is uit het spel.
Voor elke boot die een speler uitschakelt, krijgt de speler een punt.
Voor elke boot die een speler zelf op het eind nog in het spel heeft, krijgt de speler ook een punt.

Voorbeeld
De Ayla I ligt op roosterpunt (1,3).
Opdracht **3 horizontaal AI** betekent een horizontale kogel vanaf boot AI op hoogte 3. Bij deze opdracht wordt de eerst mogelijke boot links van AI op hoogte 3 (y = 3) geraakt (zelfs als dat een eigen boot is).
Opdracht **1 verticaal AI** betekent een verticale kogel vanaf boot AI op breedte 1. Bij deze opdracht wordt de eerst mogelijke boot onder AI op breedte 1 (x = 1) geraakt.

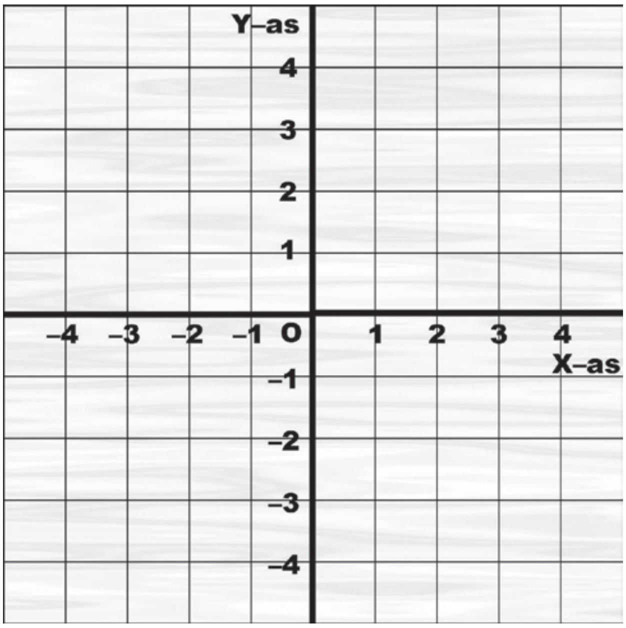


Ayla mag het spel beginnen, daarna is Benjamin aan de beurt, vervolgens Celim en Dorien is als vierde aan de beurt.
Na Dorien is Ayla weer aan de beurt voor een schot en zo verder.
Een speler mag zelf kiezen vanaf welke boot hij gaat schieten en hij mag bij een nieuwe beurt weer dezelfde boot gebruiken. Maar hij kan niet schieten vanaf een uitgeschakelde boot.
Een speler die geen boten meer in het spel heeft, moet passen. Als een speler nog wel een boot heeft, maar geen mogelijkheid meer om een andere boot te raken, dan mag hij ook passen.
Een speler van wie een boot is geraakt, zegt RAAK!
Dan weet de schutter dat hij een punt heeft gescoord.
Op het eind, als iedereen heeft gepast, telt elke speler hoeveel punten hij heeft.
Winnaar is degene met het hoogste aantal punten.

Ayla, Benjamin, Celim en Dorien gaan het Assenstelspel spelen.
Gebruik het assenstelsel op de volgende pagina om een overzicht te krijgen van de strijd.
Onder het assenstelsel zijn alle kanonneeropdrachten gegeven.

Een **R** betekent dat er bij dat schot een boot geraakt wordt. Alle spelers zorgen ervoor dat ze geen eigen boot raken. Naast het assenstelsel kun je zien waar de spelers hun eerste twee boten plaatsen. Van elke derde boot moet jij zelf de coördinaten proberen te vinden.

2 Wie schakelt welke boot uit, wie houdt welke boten over en hoeveel punten behaalt ieder? Welke speler wint het spel en wat zijn de coördinaten van elke derde boot?



AI = (2,2)
AII = (2,1)
AIII = (?,?)

BI = (1,–3)
BII = (3,–4)
BIII = (?,?)

CI = (–3,–1)
CII = (–2,–4)
CIII = (?,?)

DI = (–3,3)
DII = (–2,1)
DIII = (?,?)

Tip:
De boten AIII en BIII liggen gespiegeld t.o.v. de x-as.

Kanonneeropdrachten:

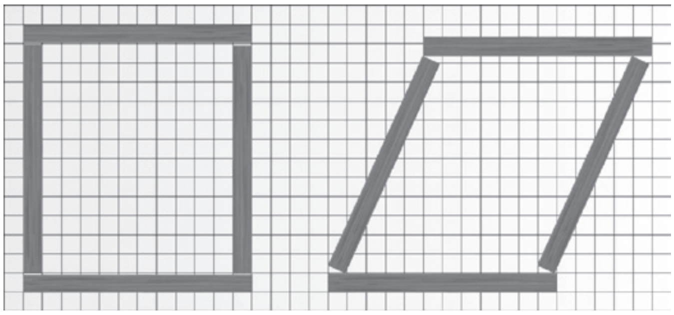
	Ayla	Benjamin	Celim	Dorien
Beurt 1	2 verticaal AII	–3 horizontaal BI	–1 horizontaal CI	–2 verticaal DII
Beurt 2	1 horizontaal AII **R**	1 verticaal BI	–2 horizontaal CIII **R**	4 horizontaal DIII **R**
Beurt 3	3 verticaal AIII **R**	past	–4 verticaal CIII	3 horizontaal DI
Beurt 4	2 horizontaal AI		–3 verticaal CI **R**	–1 verticaal DIII
Beurt 5	past		past	past

Speler	De boten die deze speler uitschakelt	De boten die deze speler overhoudt	Het aantal punten voor deze speler	De coördinaten van de derde boot
Ayla	DII en BII	AI, AII en AIII	2 + 3 = 5	(3,2)
Benjamin	geen	BI	0 + 1 = 1	(3,–2)
Celim	BIII en DI	CI en CIII	2 + 2 = 4	(–4, –2)
Dorien	CII	DIII	1 + 1 = 2	(–1,4)

De winnaar van het spel is: De winnaar van het spel is Ayla. De boten AIII en BIII liggen gespiegeld t.o.v. de x-as. Daaruit volgt: AIII = (3,2) en BIII = (3,–2). (De mogelijkheden (3,1) voor AIII en (4,–2) voor BIII vallen af door het gegeven dat AIII en BIII t.o.v. de x-as gespiegeld liggen.)

Les 8 Parallellogrammen

Mehmet en Sibel knutselen allebei een houten wissellijstje. In die lijstjes willen zij zelfgemaakte tekeningen doen. Sibel werkt heel precies en krijgt als resultaat een mooie rechthoek. Mehmet is minder nauwkeurig en heeft bij zijn lijstje de houtschroeven niet zo stevig aangedraaid. Je ziet de lijstjes van Sibel en Mehmet hiernaast. Het lijstje van Mehmet heeft geen rechte hoeken, het is geen rechthoek.



lijstje Sibel *lijstje Mehmet*

1 Wat voor vierhoek is het lijstje van Mehmet wel? (Als je het niet zeker weet, kijk dan even in Les 4.)

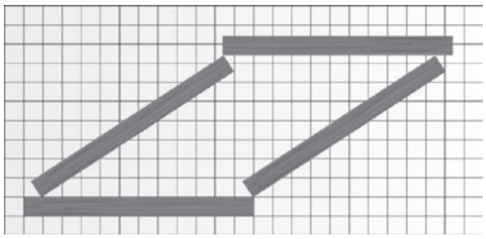
Het lijstje van Mehmet is een: parallellogram

2 Geldt dat ook voor het lijstje van Sibel? Ja, het lijstje van Sibel is ook een parallellogram. De tegenoverliggende zijden zijn parallel en even lang. Iedere rechthoek is automatisch een parallellogram. Andersom hoeft niet ieder parallellogram een rechthoek te zijn. Kijk maar naar het lijstje van Mehmet.

Mehmet vindt zijn lijstje wel grappig zo. ‘Bovendien maakt het voor de tekeningen die ik maak niet uit. Ik moet evenveel tekenen als jij. De lengte van de zijden is hetzelfde gebleven. Dus ook de oppervlakte is hetzelfde.’ Sibel is het daar niet mee eens. ‘Dat is niet waar. De oppervlakte in mijn lijstje is groter. Ik moet meer tekenen om het blad vol te krijgen.’

3 Wie heeft er volgens jou gelijk, Mehmet of Sibel?

Sibel heeft gelijk. (In opdracht 4 wordt dat duidelijk.)



‘Mijn parallellogram is hoger’, zegt Sibel. ‘Duw maar eens tegen de zijkant van je lijstje, dan wordt je lijstje steeds platter. De oppervlakte wordt steeds kleiner. Ook de hoogte wordt almaar kleiner.’

Mehmet laat zich niet zo snel overtuigen. Hij wil een bewijs zien, voordat hij Sibel kan geloven. Op zolder vinden Sibel en Mehmet een wiskundeboek van de middelbare school. Daarin hopen zij het antwoord te vinden. Maar dat valt tegen. Als ze het boek openslaan, blijkt dat het boek flink is aangevreten. Het is daardoor niet meer dan een verzameling losse stukjes papier.

In het wiskundeboek ontdekken Sibel en Mehmet het volgende vraagstuk:

4 Hieronder staan twaalf stukjes die Sibel en Mehmet verzameld hebben. Kun jij uitzoeken welke van die stukjes je moet gebruiken om de oppervlakte van een parallellogram te vinden?
Zet die stukjes in de goede volgorde. Wat je niet nodig hebt, laat je weg.
De tekeningen kunnen je daarbij helpen. Je kunt op twee manieren bij een goed antwoord komen. (In beide gevallen zijn de laatste drie stukjes hetzelfde.)
Als het je lukt, dan heb je het bewijs van een handige formule ontdekt voor de oppervlakte van een parallellogram. Welke tekening hoort bij je bewijs? Zet die ook op de goede plaats.

Tip: Op enkele van de stukjes wordt iets gezegd over een **diagonaal**. Een diagonaal in een vierhoek is een lijn die van een van de hoekpunten naar de tegenoverliggende hoekpunt gaat.

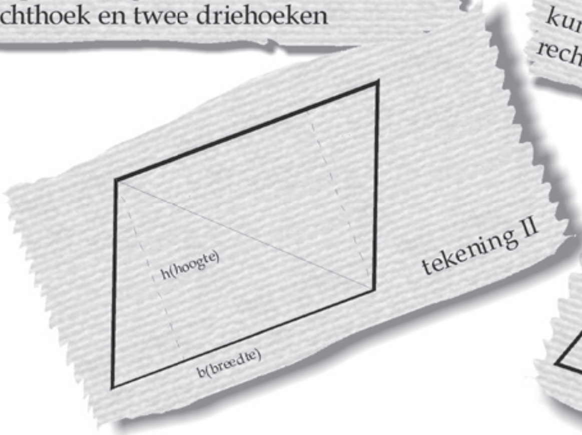
a die diagonaal verdeelt het parallellogram in twee even grote driehoeken

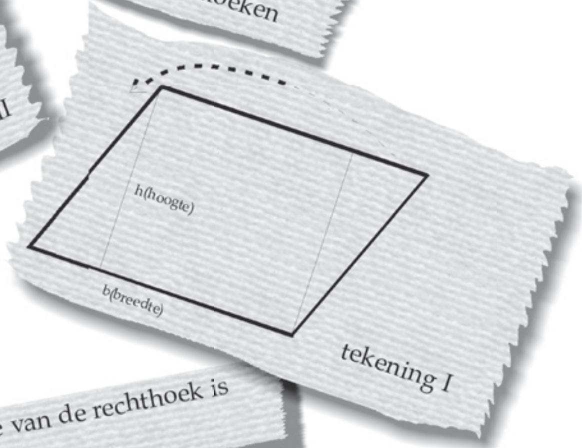
b de breedte van de rechthoek is **b**, de hoogte (lengte) van de rechthoek is **h**

c de oppervlakte van het parallellogram is dus ook **b** x **h**

d het parallellogram is te verdelen in één rechthoek en twee driehoeken

e elk van die twee driehoeken kun je verdelen in twee rechthoekige driehoeken





f teken de kortste van de twee diagonalen

g de oppervlakte van de rechthoek is **b** x **h**

h daardoor ontstaat een rechthoek met dezelfde oppervlakte als het parallellogram

i van de vier rechthoekige driehoeken die je dan hebt, kun je (met knippen en plakken) een rechthoek maken

j één van die twee driehoeken kun je (als je hem afknipt) precies tegen de andere driehoek aan leggen

De twee goede mogelijkheden zijn:

d – j – tekening I – h – b – g – c   f – a – e – tekening II – i – b – g – c

Dit bewijs laat zien, dat de hoogte een rol speelt bij de oppervlakte van een parallellogram. Hoe kleiner de hoogte, hoe kleiner de oppervlakte. Dus Sibel had gelijk.

Toets 2

1 Opa en oma vieren hun gouden bruiloftsfeest.
De kleinkinderen Sandra en René zitten bij het receptieboek.
Zij hebben een lijstje gemaakt met de leeftijden van de gasten.
Die leeftijden zie je hiernaast van jong naar oud.
Sandra en René hebben met die leeftijden enkele raadsels bedacht. Opa is vroeger leraar wiskunde geweest en kan in zijn vrije tijd de raadsels oplossen.

Sander	2 jaar
Michelle	6 jaar
André	9 jaar
Jolanda	13 jaar
Sandra	14 jaar
René	16 jaar
Bert	19 jaar
Elske	22 jaar
Germaine	25 jaar
Lenny	28 jaar
Rudolf	29 jaar
Dennis	42 jaar
Anneke	48 jaar
Louise	53 jaar
Henk	54 jaar
Oma	82 jaar
Opa	86 jaar

a Twee van de gasten zijn samen 41 jaar.
Het verschil van hun leeftijden is de leeftijd van een van de andere gasten.
Welke twee gasten worden bedoeld?

René (16 jaar) en Germaine (25 jaar).

Het verschil van hun leeftijden is de leeftijd van een andere gast. Dat is André (9 jaar).

Los opdracht 1a op in wiskundetaal.
De leeftijden van de twee gasten noemen we **x** en **y**.

Samen 41 jaar: $x + y = 41 \rightarrow x = 41 - y$

Het verschil is 9 jaar: $x - y = 9 \rightarrow x = 9 + y$

$41 - y = 9 + y \rightarrow 41 - 9 = y + y \quad y = 32 : 2$

y = 16 x = 25

b Voor welke twee andere gasten (**a** en **b**) geldt het volgende? Over 10 jaar is **a** twee keer zo oud als **b**. Over 10 jaar zijn **a** en **b** samen net zo oud als opa dan is.

Dit geldt voor de twee gasten Elske (22 jaar) en Henk (54 jaar).

Oplossing 1: Leeftijden nu zijn a en b.

$a + 10 = 2 \times (b + 10) \rightarrow a + 10 = 2 \times b + 20 \rightarrow a = 2 \times b + 10$

$a + 10 + b + 10 = 86 + 10 \rightarrow a + b + 20 = 96 \rightarrow a = 76 - b$

$2 \times b + 10 = 76 - b \rightarrow 3 \times b = 66 \rightarrow b = 22 \rightarrow a = 76 - 22 = 54$

Oplossing 2: Leeftijden over 10 jaar zijn a en b. Opa is dan 96 jaar.

$a = 2 \times b \rightarrow a + b = 86 + 10 = 96 \rightarrow a = 96 - b$

$2 \times b = 96 - b \rightarrow 3 \times b = 96 \rightarrow b = 32 \rightarrow a = 96 - 32 = 64$

Leeftijden nu zijn 10 jaar jonger, dus 22 (Elske) 54 jaar (Henk).

2 Jeroen verzamelt graag gegevens. Zo heeft hij op drie dagen van zijn kerstvakantie de temperatuur van die dag opgeschreven.

maandag 2 januari:	3° C
dinsdag 3 januari:	−7° C
woensdag 4 januari:	−11° C

a De gemiddelde temperatuur van maandag en dinsdag is
$(3 + -7) : 2 = -4 : 2 = -2°$ C

b Welke zin hoort bij welke som?

$3° + -7° =$ Het temperatuurverschil van maandag en dinsdag:
$3° - -7° = 3° + 7° = 10°$ C; dinsdag is het 10 graden kouder.

$3° - -7° =$ Het dubbele van de gemiddelde temperatuur
van maandag en dinsdag: $3° + -7° = -4°$ C.

Zet achter beide zinnen de som die erbij hoort. Bereken ook de antwoorden.

- het temperatuurverschil van maandag en dinsdag: $3° - -7° = 3° + 7° = 10°$ C;
- het dubbele van de gemiddelde temperatuur van maandag en dinsdag: $3° + -7° = -4°$ C.

c Bereken met een som het temperatuurverschil van dinsdag en woensdag:
$-7° - -11° = -7° + 11° = 4°$ C; woensdag is het 4 graden kouder.
Het volgende antwoord is ook goed: $-11° - -7° = -11° + 7° = -4°$ C;
op woensdag is de temperatuur 4 graden gedaald. = −4 °C

d Bereken met een som de gemiddelde temperatuur van dinsdag en woensdag:
$(-7° + -11°) : 2 = -18° : 2$ = −9 °C.

e De gemiddelde temperatuur over alle drie de dagen was:
$(3° + -7° + -11°) : 3 = -15° : 3$ = −5 °C.

3 In het assenstelsel zijn de volgende punten gegeven:

A = (−6,−8) B = (4,−8) C = (10,6) D = (0,6)

a Teken in het assenstelsel de vierhoek ABCD. Wat voor vierhoek is dat?
Vierhoek ABCD is een parallellogram .

b Zijde AB is de breedte van de vierhoek. Hoeveel cm is AB? Neem 1 cm als afstand van 0 tot 1.
AB = 10 cm.

c Punt P heeft de coördinaten (0,−8). Hoe groot is hoogte PD van de vierhoek?
PD = 14 cm.

d Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van de vierhoek?

De oppervlakte van vierhoek ABCD = breedte x hoogte = 10 x 14 = 140 cm^2.

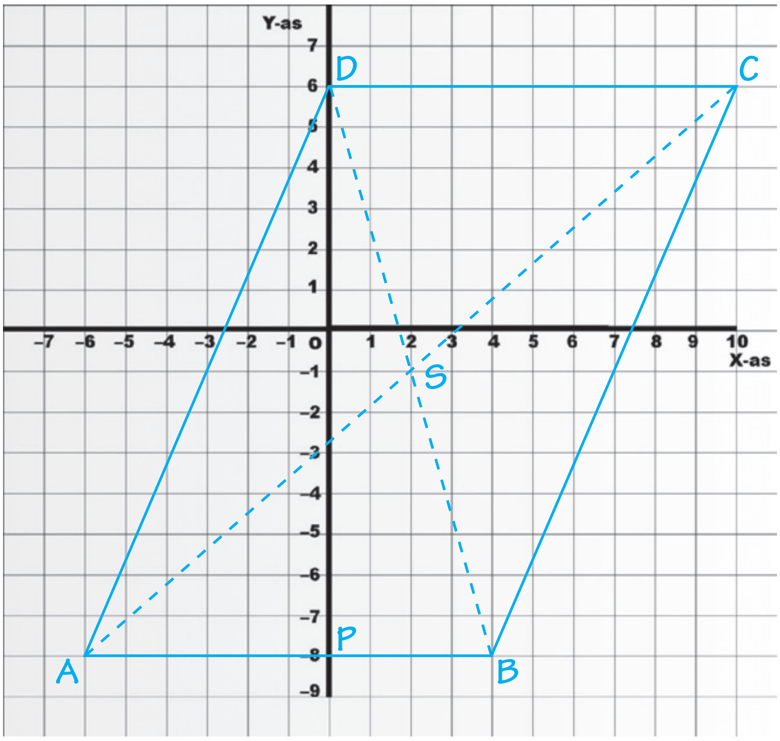
e Teken de diagonalen AC en BD. Wat zijn de coördinaten van het snijpunt S?

S = (2 , −1)

f Wat is de oppervlakte van driehoek ABC?

De oppervlakte van driehoek ABC = de helft van oppervlakte ABCD =

140 cm^2 : 2 = 70 cm^2.



Les 9 Tapijthandel K.W.A. Draat

Karel, Willem en Anton Draat zijn tapijtverkopers. Hun te kleine winkeltje is tot de nok toe gevuld met wand- en vloerkleden. Als je al die kleden eens goed kon bekijken, dan zou je iets bijzonders opvallen. Alle kleden die de firma K.W.A. Draat verkoopt, zijn vierkant! Dat kun je niet meteen zien, want de meeste tapijten staan opgerold tegen een wand.

Maar gelukkig, er is een verhuizing op komst. De drie broers hebben een groter pand gekocht. De nieuwe winkel heeft een vloeroppervlak van wel 300 vierkante meter. Willem heeft berekend, dat van dat oppervlak de helft nodig is voor een toonbank en voor loopruimte. De vraag is nu hoe alle vloerkleden in de nieuwe winkel het best kunnen worden weggelegd. Alle vloerkleden worden eerst opgerold klaargezet voor de verhuiswagen. In totaal staan er 24 tapijtrollen klaar:

- *5 rollen van 1 meter lang*
- *7 rollen van 2 meter lang*
- *6 rollen van 3 meter lang*
- *4 rollen van 4 meter lang*
- *2 rollen van 5 meter lang*

1 Karel stelt voor om in de nieuwe winkel vijf stapels tapijten neer te leggen. Alle tapijten van 1 bij 1 meter komen op elkaar, alle tapijten van 2 bij 2 op elkaar, enzovoorts. Hoeveel vierkante meter zou je voor deze vijf stapels samen nodig hebben?

Voor deze stapels heb je in totaal nodig: $1\ m^2 + 4\ m^2 + 9\ m^2 + 16\ m^2 + 25\ m^2 = 55$ m^2.

Van elk tapijt weet je de lengte. Omdat de tapijten vierkant zijn, is de breedte gelijk aan de lengte. Voor een tapijt van 3 bij 3 meter geldt dat de oppervlakte gelijk is aan $3 \times 3 = 9\ m^2$. In plaats van 3×3 wordt vaak 3^2 geschreven, je spreekt dat uit als drie kwadraat. Bij een kwadraat vermenigvuldig je een getal met zichzelf. Zo geldt $5^2 = 5 \times 5$. Je zult begrijpen dat de gebroeders Draat goed met kwadraten moeten kunnen rekenen. Karel Draat merkt trouwens een bijzondere regelmaat op.

lengte	1	2	3	4	5
oppervlakte	1	4	9	16	25

sprongen van 1

2 Valt jou ook iets op in de sprongen tussen de kwadraten?

De sprongen tussen de kwadraten worden telkens (vul een getal in) 2 groter:

oppervlakte: 1 4 9 16 25

sprong van: +3 +5 +7 +9 groter.

3 Hoe groot zal de volgende sprong zijn? Klopt dat met de volgende lengte?

De volgende lengte is 6 m, de volgende sprong tussen de kwadraten is 11 m^2.

Dat klopt, want $25 + 11 = 36$ en $6^2 = 36$.

4 Anton vraagt zich af of de tapijten wel op stapels moeten liggen. Als je alle tapijten naast elkaar op de grond zou uitleggen, wat is dan de totale oppervlakte ervan?

De totale oppervlakte van de tapijten is: 5 rollen van 1 meter lang = 5 x 1 m^2 = 5 m^2

7 rollen van 2 meter lang = 7 x 4 m^2 = 28 m^2

6 rollen van 3 meter lang = 6 x 9 m^2 = 54 m^2

4 rollen van 4 meter lang = 4 x 16 m^2 = 64 m^2

2 rollen van 5 meter lang = 2 x 25 m^2 = 50 m^2

De totale oppervlakte van de tapijten is 5 + 28 + 54 + 64 + 50 = 201 m^2.

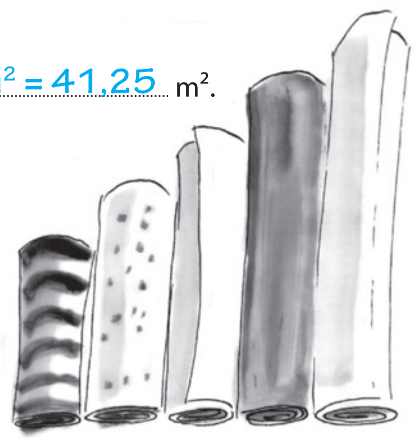
Past dat in de nieuwe winkel? Dat past wel in de nieuwe winkel, maar er blijft dan te weinig loopruimte over.

Als je goed rekent, dan zul je begrijpen dat het idee van Anton niet uitgevoerd zal worden.
De totale oppervlakte van de kleden is meer dan de helft van het winkeloppervlak, meer dan 150 m^2.

5 Voor de vijf stapels uit vraag 1 is meer dan genoeg ruimte in de nieuwe winkel.
Geldt dat nog steeds als voor een nieuwe collectie ook stapels gemaakt worden?
De nieuwe collectie vloerkleden bevat de volgende tapijten:

- 4 tapijtjes van 50 cm bij 50 cm
- 1 tapijt van 1,50 m bij 1,50 m
- 3 tapijten van 2,50 m bij 2,50 m
- 2 tapijten van 3,50 m bij 3,50 m
- 2 tapijten van 4,50 m bij 4,50 m

Voor de vijf stapels van de nieuwe collectie heb je nodig:
0,25 m^2 + 2,25 m^2 + 6,25 m^2 + 12,25 m^2 + 20,25 m^2 = 41,25 m^2.



Karel ziet ook hier een regelmaat.

lengte	0,5	1,5	2,5	3,5	4,5
oppervlakte	0,25	2,25	6,25	12,25	20,25

6 Wat valt je nu op in de sprongen tussen de kwadraten?

De sprongen tussen de kwadraten worden telkens 2 groter:

oppervlakte: 0,25 2,25 6,25 12,25 20,25

sprong van: +2 +4 +6 +8

7 Hoe groot zal de volgende sprong zijn? Klopt dat met de volgende lengte?

De volgende lengte is 5,5 m, de volgende sprong tussen de kwadraten is 10 m^2.

Dat klopt, want 20,25 + 10 = 30,25 en $5,5^2$ = 30,25.

In de nieuwe winkel is genoeg ruimte voor de stapels van de oude en nieuwe collectie samen.

8 Hoeveel m^2 is er nodig voor alle stapels samen?

Daarvoor heb je nodig: Voor alle stapels samen: 55 + 41,25 = 96,25 m^2.

Het resterende vloeroppervlak zal gebruikt worden voor een toonbank en voor loopruimte tussen de tapijten door. Ook is er gedacht aan zitruimte om met klanten te praten.

In Les 10 vind je enkele plattegronden van de nieuwe winkel. Daarop kun je tekenen hoe jij de tapijten zou neerleggen.

Ten slotte nog twee doordenkvragen.

Een journaliste van de regionale krant gaat een artikelschrijven over de nieuwe winkel. De journaliste is onder andere benieuwd of de tapijten wel goed verzekerd zijn. Zij vraagt zich daarbij af of het nodig is voor de gebroeders Draat om de gemiddelde oppervlakte per kleed te berekenen. Dat vindt Willem een interessante vraag.

9 Wat is de gemiddelde oppervlakte van alle vloerkleden? Oppervlakte nieuwe collectie:

$4 \times 0{,}25\ m^2 = 1{,}00\ m^2$ $1 \times 2{,}25\ m^2 = 2{,}25\ m^2$ $3 \times 6{,}25\ m^2 = 18{,}75\ m^2$

$2 \times 12{,}25\ m^2 = 24{,}50\ m^2$ $2 \times 20{,}25\ m^2 = 40{,}50\ m^2$ Bij elkaar: $87\ m^2$

De oppervlakte van de oude collectie had je bij oefening 4 al uitgerekend.

Totale oppervlakte alle kleden = oppervlakte oude collectie + oppervlakte nieuwe collectie = $201\ m^2 + 87\ m^2 = 288\ m^2$.

Er zijn in totaal 24 + 12 = 36 vloerkleden.

De gemiddelde oppervlakte van die vloerkleden is $288\ m^2 : 36 = 8$ m^2.

10 Wat is de lengte van een vierkant tapijt met die oppervlakte? Het tapijt is vierkant.

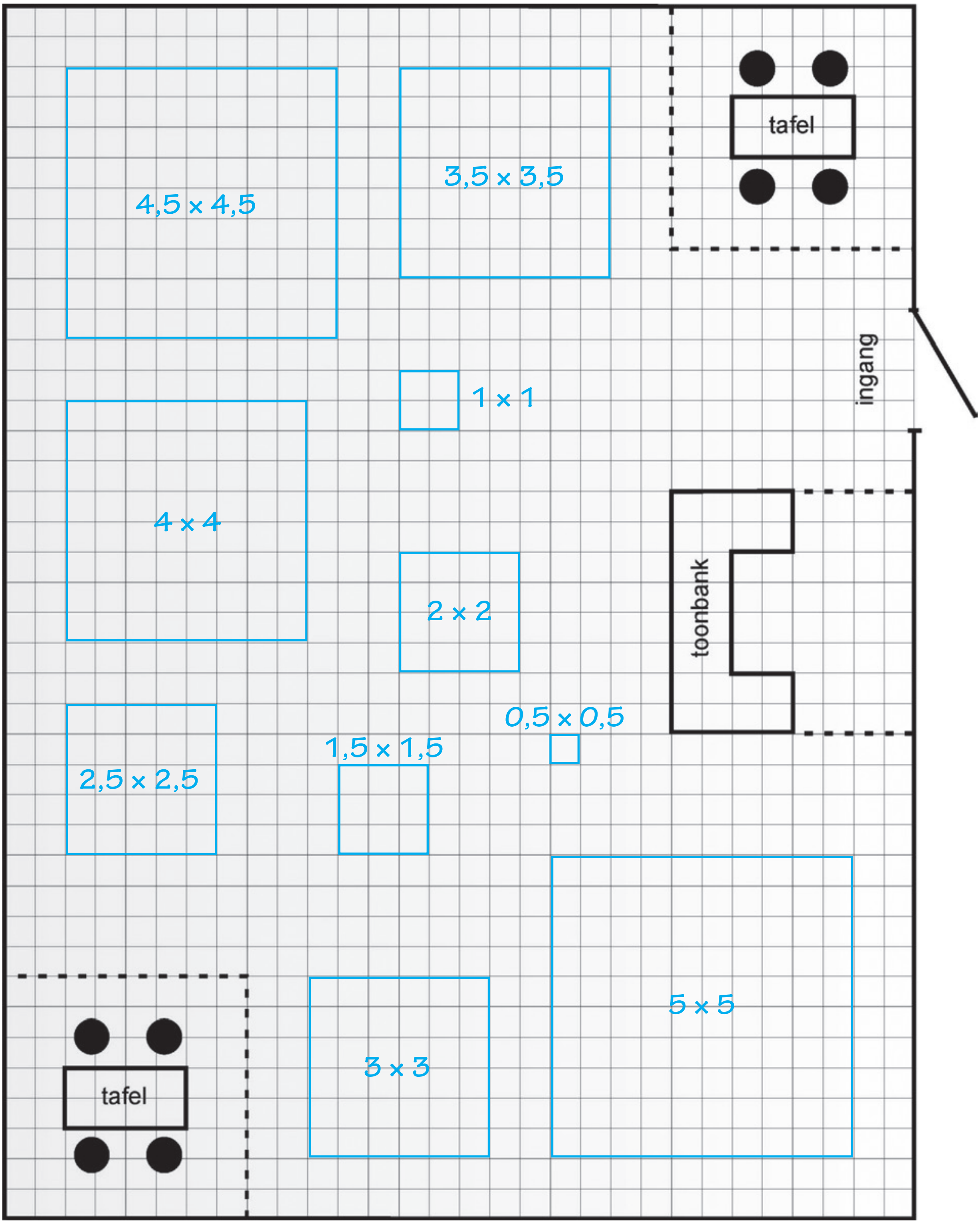
Lengte × breedte is in dit geval hetzelfde als lengte × lengte. Het kwadraat van de lengte = $8\ m^2$. In Les 13 wordt uitgelegd, dat $\sqrt{8}$ het getal is dat je zoekt.

De lengte is ongeveer 2,83 m.

Les 10 Hoe zou jij de tapijten neerleggen?

In deze les mag je zelf de nieuwe winkel van de gebroeders K.W.A. Draat inrichten.

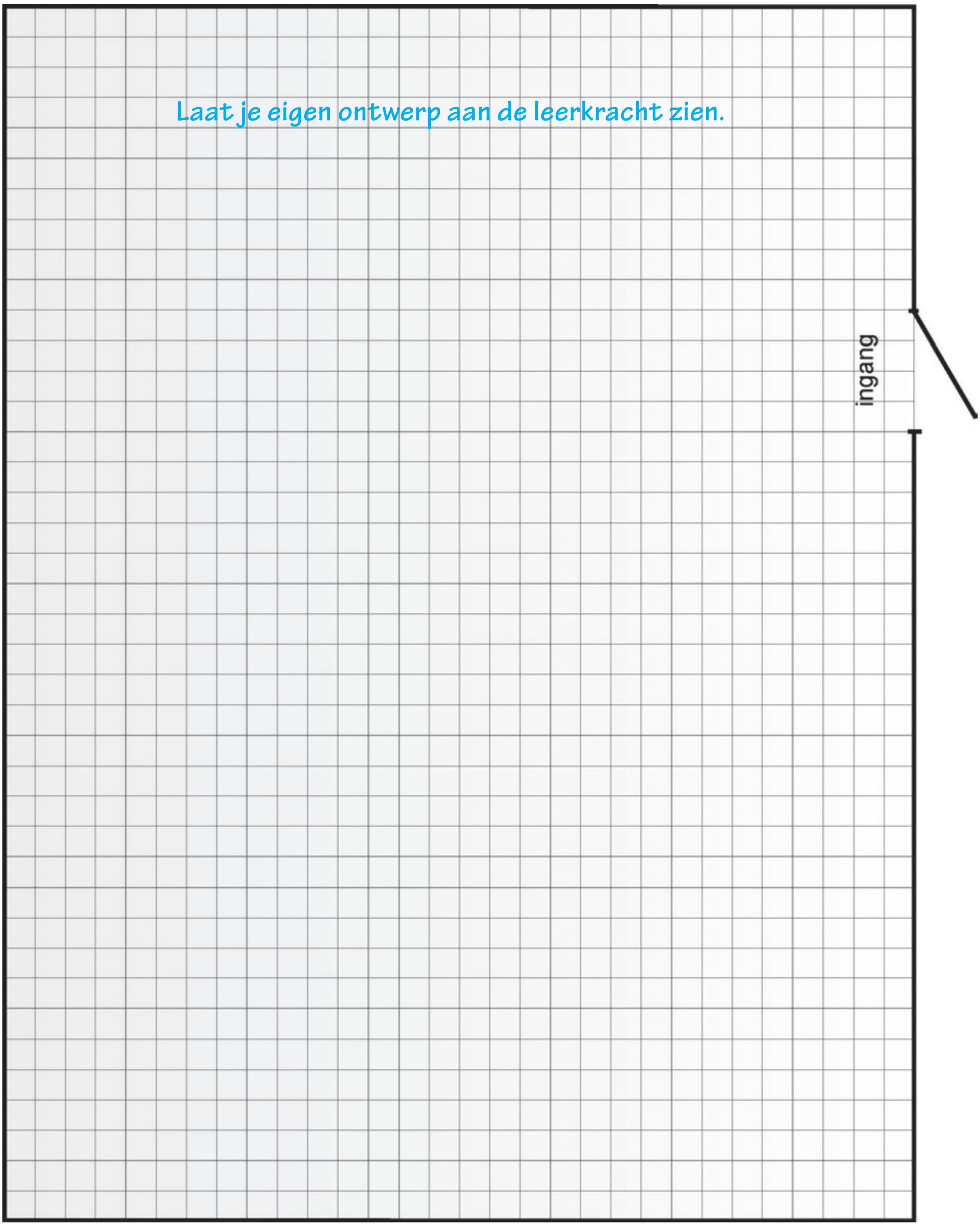
1 Teken de tapijten in de plattegrond en hou je daarbij aan de volgende voorwaarden:
- Tussen alle tapijten onderling moet minimaal één meter afstand zijn.
- Elk tapijt moet minstens één meter van de muur af liggen, minstens één meter van de zitruimtes en één meter van de toonbank.
- Het deel na de ingang (4 m bij 4 m) moet vrij blijven.
- 1 cm op de tekening is in werkelijkheid 1 m.



Meerdere oplossingen zijn mogelijk. Een van de inrichtingen die aan alle voorwaarden voldoet, zie je hierboven.

2 Als jij de plaats van de toonbank zelf mag kiezen en de plekken waar men met klanten aan een tafel kan zitten, dan kom je misschien wel tot een heel andere keuze.

Kies in de plattegrond op deze bladzijde eerst de plekken waar jij een toonbank en twee zitruimtes wilt hebben. Teken de toonbank en de zitruimtes op die plekken. De toonbank heeft dezelfde vorm als op de vorige plattegrond. De vorm van de zitruimtes is vrij, maar voor beide zitruimtes moet je 16 m² gebruiken.
Teken vervolgens de tapijten in de plattegrond. Hou je daarbij aan dezelfde voorwaarden als bij opdracht 1. Laat daarna je ontwerp aan de leerkracht zien.



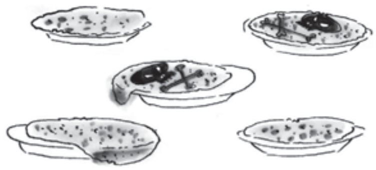
Les 11 Kansen op redding

Hans en Grietje zitten gevangen bij een heks. Ze hebben zo hun bedenkingen. Zijn ze wel bij de 'goede' foute heks terechtgekomen? Deze heks is niet zo tekstvast als die in het sprookje. Bovendien geeft ze ingewikkelde vraagstukken op met kansen om vrij te komen.

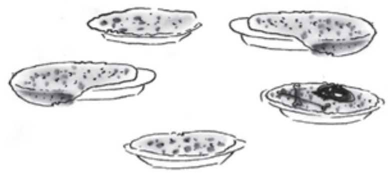
'Ha ha haaa', schatert de heks. 'Ik heb een grote stapel appelpannenkoeken gebakken. Nu had ik natuurlijk niet toevallig net gisteren van Sneeuwwitjes koningin een grote giftige appel gekregen. Daar kon ik precies drie pannenkoeken mee vullen. In mijn oneindige goedheid heb ik daarnaast zeven pannenkoeken gebakken met biologisch geteelde appels. Die kun je gewoon eten zonder dood te vallen.'

'Welnu, ik leg jullie twee keuzemenu's voor:

Menu 1
In dit menu zijn twee van de vijf pannenkoeken giftig. Je kiest ***één*** *van de vijf appelpannenkoeken om op te eten.*



Menu 2
In dit menu is één van de vijf pannenkoeken giftig. Je kiest ***twee*** *van de vijf appelpannenkoeken om op te eten.*



Bij beide menu's is er een kans om de nieuwe Sneeuwwitje te worden, ofwel om een giftige appelpannenkoek te kiezen. Oh, wat zou dat fantastisch zijn! Maar, en dat vind ik persoonlijk wel jammer, ik moet jullie helaas van de sprookjesschrijver een kans op redding geven.
Als jullie een hele moeilijke vraag goed beantwoorden, dan moet ik verklappen welke pannenkoeken giftig zijn en mogen jullie na het eten ongedeerd vertrekken.'

Dit is de vraag die Hans en Grietje goed moeten beantwoorden.
zie het antwoord op vraag 4c.

1 Bij welk menu is de kans het grootst, dat er geen giftige pannenkoek gekozen wordt?

Als jij Hans en Grietje zonder extra hulp aan het goede antwoord kunt helpen, ga dan je gang en geef de heks van katoen. Lees later verder om te controleren of jouw aanpak tot het goede antwoord leidde. Als je ondersteuning wilt bij het berekenen van kansen, lees dan nu verder.

Over kansen
Als je wilt berekenen hoe groot de kans op een bepaalde situatie is, dan moet je onderzoeken in welk deel van alle mogelijkheden die situatie optreedt. Als alle mogelijkheden gelijkwaardig zijn, dan geldt:

$$\textit{de kans op een giftige pannenkoek} = \frac{\textit{het aantal mogelijkheden met een giftige pannenkoek}}{\textit{het totale aantal mogelijkheden}}$$

Kansen worden vaak in procenten weergegeven of als getal tussen 0 en 1 (0 en 1 tellen ook mee). Hoe meer van de mogelijkheden het gewenste resultaat hebben, hoe dichter de kans bij 100% of bij 1 ligt.

De kans op één niet-giftige pannenkoek bij menu 1

Menu 1 heeft drie mogelijkheden met een niet-giftige pannenkoek. Het totale aantal mogelijkheden is vijf, er zijn vijf pannenkoeken.

2 Hoe groot is bij menu 1 de kans op een niet-giftige pannenkoek?

De kans op een niet-giftige pannenkoek = $\frac{3}{5}$ = 60 %.

De kans op twee niet-giftige pannenkoeken bij menu 2

3 Hoe groot is bij menu 2 de kans dat de eerste pannenkoek die je pakt niet giftig is?

Die kans = $\frac{4}{5}$ = 80 %.

4 Hoe groot is bij menu 2 de kans dat de eerste pannenkoek die je pakt niet giftig is, en dat daarna ook de tweede pannenkoek niet giftig is?

Die kans is zie het antwoord op vraag 4c.

Vraag 4 is nog niet zo eenvoudig. De eerste pannenkoek mag niet giftig zijn en ook de tweede niet. Daarom eerst een paar tussenvraagjes, vragen a en b.

In vraag 3 werd duidelijk dat in 80% van de mogelijkheden de eerste pannenkoek niet giftig is. We moeten nu onderzoeken in welk deel van die 80% ook de tweede pannenkoek niet giftig is.

a Pannenkoek 1 is niet giftig. Hoeveel pannenkoeken zijn er over en hoeveel daarvan zijn niet giftig?

Er zijn vier pannenkoeken over; drie daarvan zijn niet giftig.

b Drie van de vier pannenkoeken, hoeveel procent is dat? Drie van de vier is 75 %.

c Hieruit volgt, dat 75% van de 80% uit vraag 3 twee niet-giftige pannenkoeken oplevert. Weet je nu het antwoord op vraag 4? En vervolgens het antwoord op vraag 1?

Je kunt ook het goede antwoord vinden door alle mogelijkheden te tellen.
Noem de vijf pannenkoeken P1, P2, P3, P4 en P5.
In de tabel zie je alle mogelijkheden om een eerste en een tweede pannenkoek te kiezen.

P1-P2	P1-P3	P1-P4	P1-P5
P2-P1	P2-P3	P2-P4	P2-P5
P3-P1	P3-P2	P3-P4	P3-P5
P4-P1	P4-P2	P4-P3	P4-P5
P5-P1	P5-P2	P5-P3	P5-P4

De kans op twee niet-giftige pannenkoeken bij menu 2 = 75% van 80% = $\frac{3}{4}$ deel van 80% = 60%. Dit is een kans van ($\frac{3}{4} \times \frac{4}{5}$ =) $\frac{3}{5}$.
Het antwoord op vraag 4 is dus $\frac{3}{5}$ = 60%. Omdat vraag 2 en vraag 4 hetzelfde antwoord hebben, is het antwoord op vraag 1: De kans dat er **geen** giftige pannenkoek gekozen wordt, is bij menu 1 (met 1 pannenkoek) even groot als bij menu 2 (met 2 pannenkoeken).

d Zie jij hoe je met deze tabel de kans op een giftige pannenkoek kunt vinden?

Tip: Hoe vaak komt elke pannenkoek in de tabel voor? Elke pannenkoek komt acht keer voor in de twintig mogelijke combinaties in de tabel. Dus het maakt niet uit welke van de vijf pannenkoeken giftig is. In elk geval zit er bij acht van de twintig combinaties een giftige pannenkoek.

Dus hoe vaak komt er een giftige in voor? De kans dat één van de twee appelpannenkoeken bij menu 2 giftig is, is $\frac{8}{20} = \frac{4}{10} = 40\%$.
Dit komt overeen met een kans van 60% op twee niet-giftige pannenkoeken.

Als Hans en Grietje het goede antwoord hebben gegeven, mogen ze van de heks toch niet weg. Ze moeten ook nog het volgende vraagstuk oplossen. Mogen ze jou om hulp vragen?

Menu 3

In dit menu zijn er twee dienbladen met vijf pannenkoeken. Van elke vijf appelpannenkoeken is er één giftig. Van elk dienblad kies je er één om op te eten.

5 Hoe groot is nu de kans dat je twee niet-giftige appelpannenkoeken kiest? De kans op een niet-giftige appelpannenkoek van dienblad 1 = $\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 80\%$.
Ook de kans op een niet-giftige appelpannenkoek van dienblad 2 = $\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 80\%$.
De kans op eerst een niet-giftige pannenkoek van dienblad 1 en daarna een niet-giftige van dienblad 2 is dan 80% van 80%, ofwel $\frac{8}{10} \times \frac{8}{10} = \frac{64}{100} = 64\ \%$

Les 12 Sportief rekenen

De allrounders Simon Printer en Sven Tayer hebben het afgelopen weekend een schaatswedstrijd gehouden over vier afstanden.
In het schema hieronder kun je zien welke tijden de beide schaatsers op de klokken hebben gezet.

	S. Printer	S. Tayer
500 meter	36.12	37.12
1.500 meter	1.48.00	1.49.50
5.000 meter	6.26.00	6.20.00
10.000 meter	13.22.00	13.10.00

Zoals je wel zult begrijpen is de tijd op de 500 meter aangegeven in seconden plus honderdsten. De andere afstanden zijn aangegeven in minuten en seconden plus honderdsten van een seconde.

1 Tel de tijden van Simon Printer bij elkaar op.

36.12 + 1.48.00 + 6.26.00 + 13.22.00 = 22.12.12

2 Tel de tijden van Sven Tayer bij elkaar op.

37.12 + 1.49.50 + 6.20.00 + 13.10.00 = 21.56.62

3 Wie van de beide schaatsers heeft de vier afstanden bij elkaar in de kortste tijd afgelegd?

Sven Tayer heeft de kortste tijd over de vier afstanden bij elkaar.

4 Vind jij het nu eerlijk om Sven Tayer tot winnaar uit te roepen? Eigen mening

In de schaatswereld vindt men dat geen eerlijke manier om de winnaar te bepalen.

5 Kun jij beredeneren waarom niet? Een verschil van 1 seconde op de 500 meter is in verhouding veel groter dan een verschil van 1 seconde op de 10 km. Daarom is een puntentelling bedacht waarbij alle tijden omgerekend worden tot een tijd over 500 meter.

De tijd die gereden is op de 1.500 meter wordt door 3 gedeeld, 1.500 : 3 = 500.

6 Door welk getal moet je de tijd op de 5.000 meter delen? Door 10 (5.000 : 10 = 500)

7 Door welk getal moet je de tijd op de 10.000 meter delen? Door 20 (10.000 : 20 = 500)

8 Reken nu alle tijden van de schaatsers om naar de 500 meter. Zet bij elke tijd eerst de minuten om in seconden (60 seconden per minuut!). De tijden worden in het schema aangegeven in seconden en duizendsten van een seconde, dus met drie cijfers achter de punt.

	S. Printer	S. Tayer
500 meter	36.120	37.120
1.500 meter	36.000	36.500
5.000 meter	38.600	38.000
10.000 meter	40.100	39.500

De tijd 1.48.00 (1 minuut 48,00 seconden) van Simon Printer op de 1.500 meter wordt (1 × 60.000 + 48.000) = 108.000 (108 seconden en 000 duizendsten).
Vervolgens deel je de uitkomst door 3. 108.000 : 3 = 36.000.

9 Tel de punten van Simon Printer bij elkaar op.

36.120 + 36.000 + 38.600 + 40.100 = 150.820

10 Tel de punten van Sven Tayer bij elkaar op.

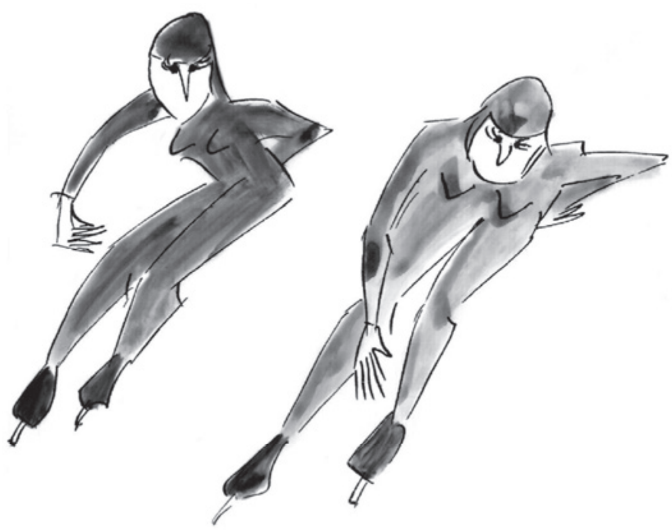
37.120 + 36.500 + 38.000 + 39.500 = 151.120

De winnaar van de schaatswedstrijd is degene met het **laagste** puntentotaal.

11 De winnaar is: Simon Printer.

Ook de schaatssters Vera Lug en Renate Ap hebben een wedstrijd gehouden.
Bij het allroundschaatsen voor vrouwen wordt niet de 10 km geschaatst, maar de 3 km.
In het schema hieronder zie je de tijden van deze allroundsters.

	V. Lug	R. Ap
500 meter	39.62	39.49
1.500 meter	1.56.94	1.57.45
3.000 meter	4.06.33	4.05.79
5.000 meter	6.55.15	6.55.85



12 Reken de tijden van Vera Lug en Renate Ap om naar de 500 meter en bereken hun totalen.
Zet die getallen in het volgende schema.

	V. Lug	R. Ap
500 meter	39.620	39.490
1.500 meter	38.980	39.150
3.000 meter	41.055	40.965
5.000 meter	41.515	41.585
Totaal	161.170	161.190

13 De winnares van deze wedstrijd is: Vera Lug

14 Ten slotte nog een doordenker.
'Had ik maar één van de vier afstanden iets sneller gereden', verzuchtte Renate Ap, 'dan had iedereen kunnen zien dat ik net zo goed ben als Vera.' Renate Ap had graag op precies hetzelfde eindtotaal willen uitkomen als Vera Lug.

Met welke tijd op de 500 meter zou dat gelukt zijn? Het verschil tussen Vera Lug en Renate Ap bedroeg 0.020 punt. Op de 500 meter had Renate Ap 0.02 seconde sneller moeten rijden: 39.47.

Welke tijd was daarvoor op de 1.500 meter nodig? Omgerekend naar de 1.500 meter is het verschil drie keer zo groot, dus 0.06 seconde: 1.57.39.

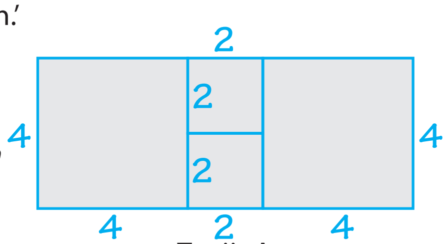
Welke tijd was op de 3.000 meter nodig? Het verschil op de 3.000 meter is 0.12 seconde: 4.05.67.

En welke tijd op de 5.000 meter? Het verschil op de 5.000 meter is 0.20 seconde: 6.55.65.

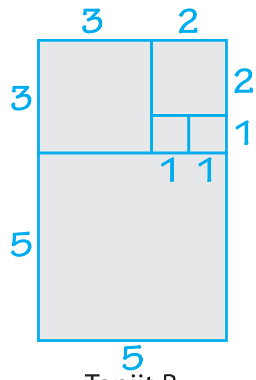
Toets 3

1 Tapijthandelaar Hendrik Balk heeft in zijn werkplaats prachtige rechthoekige tapijten. Hij wil graag zaken doen met de gebroeders K.W.A. Draat. De tapijten die de firma Draat verkoopt, zijn echter allemaal vierkant. Nu heeft Hendrik Balk een bijzonder soort mes dat bij het snijden een zoom maakt. Daarmee kan hij nieuwe vierkante tapijten snijden uit rechthoekige tapijten. Hendrik Balk heeft twee prachtige tapijten in de verkoop, één van 10 meter bij 4 meter en één van 8 meter bij 5 meter.
Karel Draat doet een voorstel. 'Ik wil dat jij uit deze twee tapijten niet meer dan tien vierkante tapijten snijdt. Je moet daarbij alle stof gebruiken, dus geen rest overhouden. Als je dat lukt, dan ben ik je man, ofwel dan koop ik de tapijten.'

0,5 cm = 1 m



Tapijt A



Tapijt B

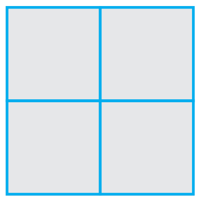
a Verdeel de tapijten A en B in vierkante tapijten. In totaal mogen het niet meer dan tien tapijten worden. Teken die verdeling in tapijt A en in tapijt B.

b Alle kleden uit opdracht 1a worden door Willem Draat opgerold en rechtopgezet.

Wat is de totale lengte van alle tapijtrollen uit tapijt A? 2 × 4 m + 2 × 2 m = 8 m + 4 m = 12 m.

Wat is de totale lengte van alle tapijtrollen uit tapijt B? 5 m + 3 m + 2 m + 2 × 1 m = 12 m.

Hendrik Balk heeft ook nog een schitterend tapijt van 5 meter bij 5 meter. Anton Draat ziet liever vier kleinere tapijten. Hendrik Balk stelt voor om het kleed in vier even grote vierkante stukken te snijden.


Tapijt C

0,5 cm = 1 m

c Teken die vier tapijten in tapijt C.

d Hoe groot is de oppervlakte van het hele tapijt? 5 × 5 = 25 m^2.

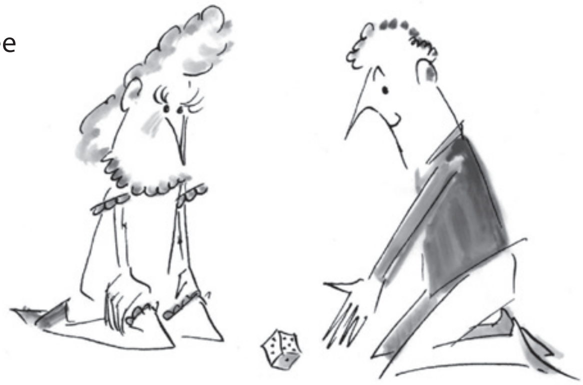
Bedenk dat die oppervlakte gelijk verdeeld wordt over de vier kleine tapijten.

e Hoe groot is de oppervlakte van elk van de kleine tapijten? 25 : 4 = 6,25 m^2.

f Hoe lang is elk van die tapijten? 5 : 2 = 2,5 m.

H is het aantal ogen van de worp van Hans, G is het aantal ogen van Grietjes worp. In de tabel zie je de mogelijkheden (H, G), die alle gelijkwaardig zijn.

2 Tijdens hun gevangenschap bij de heks had Hans een dobbelsteen in zijn broekzak. Grietje kwam op het idee om daarmee allerlei vragen over kansen te oefenen. Hans en Grietje werpen allebei één keer met de dobbelsteen. Je kunt de verschillende mogelijkheden in een tabel zetten.



H/G	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

a Hoe groot is *Kans a* dat Hans een 6 werpt?

Kans a = $\frac{1}{6}$. De 6 is één van de zes mogelijke worpen voor Hans. Elke worp heeft een even grote kans.

Voor Grietje is die kans natuurlijk net zo groot.

b Hoe groot is *Kans b* dat minstens één van de twee, of Hans of Grietje, een 6 werpt?

Kans b = $\frac{11}{36}$. Er zijn 36 mogelijke combinaties (H,G). In elf van die combinaties wordt een 6 geworpen.

c Hoe groot is *Kans c* dat Hans én Grietje allebei een 6 werpen?

Kans c = $\frac{1}{36}$. (6,6) is één van de 36 combinaties (H,G).

d Hoe groot is *Kans d* dat Hans lager dan een 3 werpt?

Kans d = $\frac{1}{3}$. Een 1 of een 2 (lager dan een 3) zijn twee van de zes mogelijke worpen voor Hans en $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

e Hoe groot is *Kans e* dat Hans en Grietje beiden lager dan een 3 werpen?

Kans e = $\frac{1}{9}$. In de tabel is af te lezen dat vier van de 36 combinaties (H,G) de gevraagde situatie geven $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

f Hans en Grietje tellen hun aantallen bij elkaar op. Hoe groot is *Kans f* dat zij bij elkaar minder dan 5 werpen?

Kans f = $\frac{1}{6}$. In de tabel is af te lezen dat zes van de 36 combinaties (H,G) de gevraagde situatie geven. $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

g Waarom is *Kans f* niet even groot als *Kans e*? De mogelijkheden dat Hans of Grietje een 3 werpt en de ander een 1, (3,1) en (1,3), horen wel bij *kans f* en niet bij *kans e*. Daardoor is *kans f* groter.

3 Bij de sprintkampioenschappen heeft schaatser IJsbrand vier afstanden afgelegd. Op zaterdag reed IJsbrand de 500 meter en de 1.000 meter. Op zondag schaatste hij beide afstanden nog een keer. In het schema zie je zijn tijden in minuten (alleen op de 1.000 m), seconden en honderdsten van een seconde.
IJsbrand vraagt zich af op welke dag hij het best heeft gereden.

	IJsbrand zaterdag	IJsbrand zondag
500 meter	35.12	34.96
1.000 meter ↓ 500 meter	1.09.48 ↓ 1.09.48 = 69.48 34.74	1.09.74 ↓ 1.09.74 + 69.74 34.87
Totaal	69.86	69.83

a Reken de tijden van IJsbrand op de 1.000 meter om naar de 500 meter.
Noteer die tijden in het schema.

b Reken het puntentotaal van IJsbrand op zaterdag uit. Noteer dit totaal in het schema.

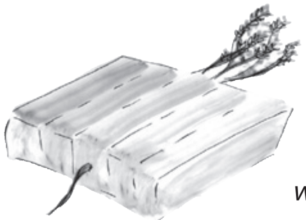
c Reken het puntentotaal van IJsbrand op zondag uit. Noteer dit totaal in het schema.

d Op welke dag reed IJsbrand over beide afstanden gezien beter?

Op ......zondag...... reed IJsbrand beter.

Les 13 Vierkante wortels

Winkelier Koba Nijn verkoopt groenten die zij zelf verbouwt. De zaken gaan erg goed, op de vierkante wortels na. Die worden bijna niet verkocht. Koba vindt datniet jammer. Sterker nog. Het is ook de bedoeling dat ze niet verkocht worden. Haar man Ko is dol op wortels. Die vreemde vorm was zijn plan. 'Kan dat?', had Koba gevraagd. 'Dat kan', had Ko geantwoord. Vanaf dat moment telen Ko en Koba Nijn vierkante wortels. Ko heeft in de tuin vierkante bedjes gemaakt van 25 cm², van 36 cm², van 49 cm², van 64 cm², van 81 cm² en van 100 cm².



Er is af en toe een klant die om wortels vraagt. Als Koba de vierkante wortels laat zien, weet zo'n klant daar geen raad mee. 'Ik weet niet waar ik moet beginnen', zegt de klant en kiest snel voor een andere groente. Ko weet er wel raad mee. 'Een goede wortel hoort één centimeter breed te zijn, de lengte volgt vanzelf.' Dat zegt Ko steeds en van een vierkante wortel van 25 cm² snijdt hij vijf wortels van 5 cm lang. Koba laat dit snijden graag over aan Ko. 'Hoeveel wortels gaan er uit 64?', vraagt ze, als ze met een plak wortel van 64 cm² binnenstapt. 'De wortel uit 64 is acht', antwoordt Ko droog.

1 Hoeveel wortels gaan er uit 36 (cm²)? 'De wortel' uit 36 is 6, want 6 × 6 = 36.

En hoeveel uit 49 (cm²)? 'De wortel' uit 49 is 7, want 7 × 7 = 49.

De oppervlaktes van de wortelbedjes zijn steeds kwadraten.
Dat maakt het voor Ko eenvoudiger om 'de wortel' te berekenen.

2 Koba brengt Ko van elk van de zes bedjes één plak vierkante wortel.
Hoeveel wortels snijdt Ko hiervan bij elkaar?

Ko snijdt 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 45 wortels.

3 Ko wil ook een vierkante wortel telen waar hij vier wortels van één cm breed uit kan snijden.
Welke oppervlakte heeft zo'n vierkante wortel en hoe lang is elk van de vier wortels daaruit?

Oppervlakte: 16 cm². Lengte: 4 cm.

4 Koba wil graag dat Ko nog een extra groot vierkant bedje maakt.
De oppervlakte van dat bedje moet een van de hieronder genoemde mogelijkheden zijn.
Welke vier van de tien onderstaande oppervlaktes kan Ko kiezen?

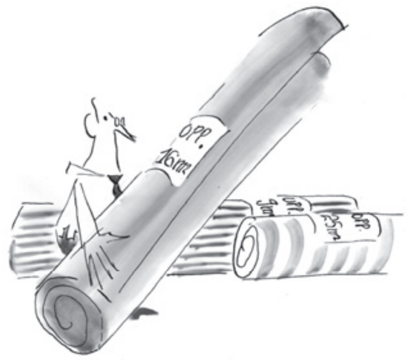
109 cm² – 115 cm² – 121 cm² – 136 cm² – 144 cm² – 150 cm² – 164 cm² – 169 cm² – 172 cm² – 196 cm²

En wat is daaruit 'de wortel'?

	Oppervlakte	'De wortel'
Keus 1	121 cm²	11 (11 × 11 = 121)
Keus 2	144 cm²	12 (12 × 12 = 144)
Keus 3	169 cm²	13 (13 × 13 = 169)
Keus 4	196 cm²	14 (14 × 14 = 196)

*Het verhaal van de wortels zie je terug in allerlei wiskundige vraagstukken.
Zo hebben de tapijtverkopers uit Les 9 er ook mee te maken.*

Karel, Willem en Anton Draat zijn druk bezig hun nieuwe winkel in te richten.
Hun voorraad bestaat uit vierkante tapijten van tien verschillende afmetingen.
Anton heeft alle tapijtrollen voorzien van een label dat de oppervlakte van het tapijt aangeeft.
Willem heeft een tapijtrol in zijn handen. Aan die tapijtrol hangt een label waarop staat: *opp. 16 m²*.



5 Wat is de lengte van dit kleed? De lengte van dit kleed is ....4.... m.

In wiskundetaal zoek je een getal a waarvoor geldt: a × a = 16, ofwel $a^2 = 16$. Het (positieve) getal waarvan het kwadraat 16 is, noemt men wortel 16. *De wortel uit 16* wordt ook gezegd, net als bij Koba en Ko Nijn. Dat schrijf je zo: √16. √16 is natuurlijk 4, want 4 × 4 = 16.

Als de oppervlakte van een kleed 9 m² is, dan is de lengte in meters √9. √9 = 3, want 3 × 3 = 9.

6 Bij welke tapijten horen de getallen √1, √4 en √25?

√1 is de lengte (in m) van het kleed met oppervlakte ....1.... m², √1= ....1....

√4 is de lengte (in m) van het kleed met oppervlakte ....4.... m², √4= ....2....

√25 is de lengte (in m) van het kleed met oppervlakte ....25.... m², √25 = ...5....

Ook Karel heeft net een kleed gepakt; daar hangt een label aan met: *opp. 12,25 m²*.

7 De lengte van dit kleed is (hele getallen invullen)

groter dan ....3.... m en kleiner dan ....4.... m.

8 Wat is precies de lengte van dit kleed? (**Tip**: zie Les 9)

De lengte van dit kleed is ....3,5.... m. want 3,5 × 3,5 = 12,25

In de nieuwe winkel komen tapijten met dezelfde oppervlakte op elkaar te liggen. Anton heeft vier tapijten klaarliggen voor verschillende stapels. Hij heeft snel de totale oppervlakte van die vloerkleden uitgerekend. Samen nemen de tapijten een oppervlakte in beslag van 43,50 m².
In de haast is Anton vergeten om de maten van de vier kleden apart op te schrijven.

9 Welke vier tapijten hebben bij elkaar een oppervlakte van 43,50 m²?
Er zijn vier mogelijke combinaties van vier tapijten. Probeer ze alle vier te vinden.
Tip: Er zijn tien verschillende lengtes (vanaf 0,5 m steeds 0,5 m erbij tot en met 5 m) en dus ook tien verschillende oppervlaktes. Zet die oppervlaktes op een kladblaadje op een rij en kijk welke combinaties bij elkaar 43,50 m² opleveren. mogelijkheid 1: 25 + 16 + 2,25 + 0,25 = 43,50 m² lengte: 5 m, 4 m, 1,5 m, 0,5 m prijs: € 500 + € 400 + € 150 + € 50 = € 1.100. mogelijkheid 2: 25 + 12,25 + 4 + 2,25 = 43,50 m² lengte: 5 m, 3,50 m, 2 m, 1,5 m prijs: € 500 + € 350 + € 200 + € 150 = € 1.200. mogelijkheid 3: 20,25 + 16 + 6,25 + 1 = 43,50 m² lengte: 4,50 m, 4 m, 2,50 m, 1 m prijs: € 450 + € 400 + € 250 + € 100 = € 1.200. mogelijkheid 4: 16 + 12,25 + 9 + 6,25 = 43,50 m² lengte: 4 m, 3,50 m, 3 m, 2,50 m prijs: € 400 + € 350 + € 300 + € 250 = € 1.300

Er hangen ook prijskaartjes aan de tapijten. Bij de tapijten waar het in vraag 9 om gaat, heeft de prijs een vaste verhouding tot de lengte. Je kunt de prijs van een tapijt berekenen door de lengte (in meters) te vermenigvuldigen met € 100,-.
Dus voor een kleed van 2 bij 2 m moet een klant 2 × € 100,- = € 200,- betalen.

10 De vier tapijten die Anton heeft klaarliggen, kosten bij elkaar € 1.300,-. Weet jij nu welke tapijten dat zijn? De tapijten van mogelijkheid 4, met lengtes 4 m, 3,50 m, 3 m en 2,50 m.

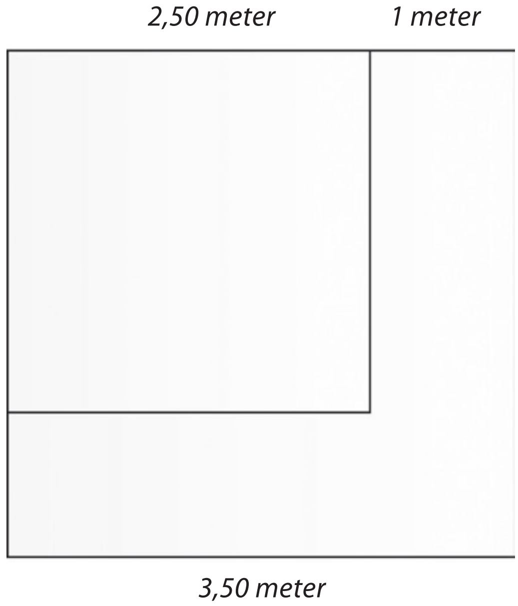
Les 14 Algebra

Karel Draat (bekend uit eerdere lessen) heeft twee kleden op elkaar gelegd, die niet op dezelfde stapel horen. Een tapijt van 2,50 meter bij 2,50 meter is op een tapijt van 3,50 meter bij 3,50 meter terechtgekomen. 'Wat een vergissing', zegt Karel, 'hoe groot zou het verschil in oppervlakte tussen deze twee kleden zijn?' Kun jij dit verschil berekenen?

Willem komt lachend aangelopen en roept enthousiast: 'Dat is algebra! $a - b^2 = (a + b) \times (a - b)$.' Anton vraagt of het Willem niet in de bol geslagen is, maar Willem laat zich niet van de wijs brengen.

Willem legt zijn broers rustig uit welke wiskunde hij in de tapijten ziet. Zie jij wat Willem bedoelt? Om je te helpen het verhaal van Willem goed te begrijpen volgt er nu eerst een uitleg over algebra.

In de wiskunde wordt veel met getallen gerekend. De taal is er meer voor letters. Toch komen letters ook goed van pas in de wiskunde. Kijk maar eens naar het volgende voorbeeld.



1 Reken uit.

$(13 \times 5) + (7 \times 5) =$ 20 × 5 = 100

$(97 \times 8) + (3 \times 8) =$ 100 × 8 = 800

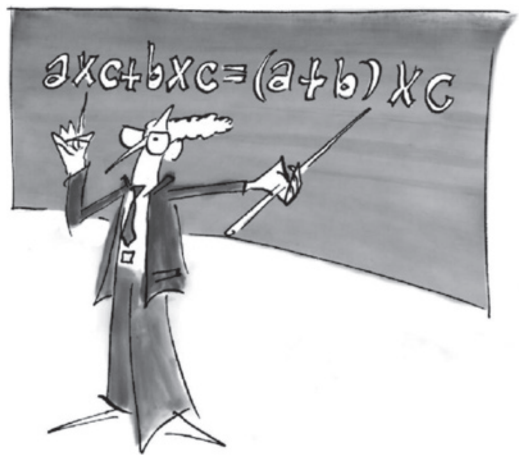
$(29 \times 40) + (11 \times 40) =$ 40 × 40 = 1.600

In de drie rekenzinnen hierboven staat een eigenschap die voor alle getallen geldt.
Het is natuurlijk onmogelijk om die regel voor ontelbaar veel getallen op te schrijven.
In de wiskunde heeft men bedacht dat je met letters kunt laten zien dat een eigenschap voor meerdere getallen geldt. Als je op deze manier letters gebruikt, dan ben je met *algebra* bezig.

In het voorbeeld van de drie rekenzinnen gaat het om de volgende eigenschap:

$a \times c + b \times c = (a + b) \times c$

Welke getallen je voor a, b en c ook invult, steeds klopt het.
In de eerste rekenzin is a = 13, b = 7 en c = 5.



2 Hoe moet je a, b en c kiezen in de tweede rekenzin?

a = 97, b = 3, c = 8

3 Hoe moet je a, b en c kiezen in de derde rekenzin?

a = 29, b = 11, c = 40

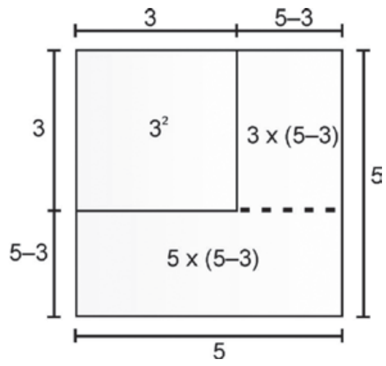
4 Welke rekenzin krijg je bij a = 125, b = 75, c = 7?

En wat is het antwoord?

125 × 7 + 75 × 7 = (125 + 75) × 7 = 200 × 7 = 1.400

Terug naar het verhaal van Willem.
Hij kent een eigenschap die geldt bij het verschil tussen twee kwadraten.
Willem laat eerst een voorbeeld zien met eenvoudige getallen.

5 Een kleed van 3 m bij 3 m ligt op een kleed van 5 m bij 5 m.
Je weet van beide kleden de oppervlakte.



De oppervlakte van het kleinste kleed is 9 m^2.

De oppervlakte van het grootste kleed is 25 m^2.

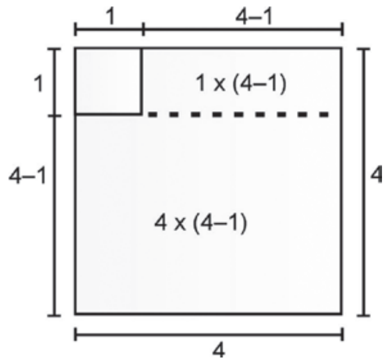
Het verschil is 25 – 9 = 16 m^2.

In de tekening is te zien dat:

$5^2 - 3^2 = 5 \times (5 - 3) + 3 \times (5 - 3) = (5 + 3) \times (5 - 3)$

6 Wat zie je op die manier in de volgende tekening?

$4^2 - 1^2 = 4 \times (4 - 1) + 1 \times (4 - 1) = (4 + 1) \times (4 - 1) = 5 \times 3 = 15$



Dat het verschil 15 is, is nu even niet zo belangrijk.

Kies a = 4 en b = 1, dan staat er:

$a^2 - b^2 = a \times (a - b) + b \times (a - b) = (a + b) \times (a - b)$

In het kort geldt dus: $a^2 - b^2 = (a + b) \times (a - b)$

Het bijzondere is, dat deze eigenschap altijd geldt voor het verschil tussen twee kwadraten, wat je ook voor a en b kiest.
Nu vraag je je misschien af, wat je aan zo'n eigenschap hebt.
In de voorgaande voorbeelden was het verschil steeds eenvoudig te berekenen.

Maar voor de vraag van Karel in het begin van deze les geeft de eigenschap wel rekenvoordeel.
Karel wilde het verschil in oppervlakte weten tussen een tapijt van 3,5 m bij 3,5 m en een tapijt van 2,5 m bij 2,5 m.

7 $(3{,}5)^2 - (2{,}5)^2 =$ (3,5 + 2,5) × (3,5 – 2,5) = 6 × 1 = 6. Het kan ook op een andere manier, maar dat is minder eenvoudig. Je moet eerst twee lastige kwadraten uitrekenen: $(3{,}5)^2 - (2{,}5)^2 = 12{,}25 - 6{,}25 = 6$

Maak deze regel af volgens de genoemde eigenschap.

Nu weten de gebroeders K.W.A. Draat een handige manier om het verschil tussen twee kwadraten uit te rekenen. Ook anderen, bijvoorbeeld architecten, kunnen voordeel hebben van de eigenschap.

8 Een architect ontwerpt een plein van 75 meter bij 75 meter. In het midden komt een vierkante vijver van 25 meter breed.
Welk oppervlak blijft er over om tegels te leggen?

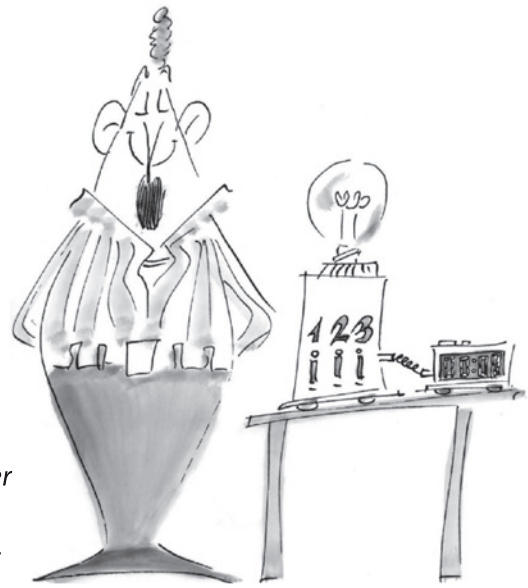
Er blijft $75^2 - 25^2 = (75 + 25) \times (75 - 25) = 100 \times 50 = 5.000$ m^2

van het plein over om tegels te leggen.
Als je de eigenschap goed kunt gebruiken, dan ben je zelfs sneller dan een rekenmachientje.

9 Reken zo snel als je kunt de volgende som uit: $(23{,}5)^2 - (16{,}5)^2 =$

$(23{,}5 + 16{,}5) \times (23{,}5 - 16{,}5) = 40 \times 7 = 280$

Les 15 Tijdelijke kansen



Uitvinder Simon Buis gaat drie weken met vakantie. Al zijn dure uitvindingen blijven onbewaakt thuis. Simon wil de kans dat er een inbreker in huis komt zo klein mogelijk houden. Daarom wil hij dat er af en toe in de kamer een lamp brandt. De knappe uitvinder gebruikt daarvoor zijn bijzondere kloklamp.
Simon heeft een lamp uitgevonden die verbonden is aan zijn digitale klok. Op die lamp staan de cijfers 1, 2 en 3. Bij elk van die cijfers hoort een aan/uit-knopje. Hoe werkt de lamp?
Wat gebeurt er als Simon het 1-knopje aan doet?
Als het 1-knopje aan is, dan brandt de lamp, zodra het urendisplay van de klok een 1 laat zien. In het getal dat de uren aangeeft, moet dus minstens één 1 staan. Staat er wel een 1 bij de minuten, maar niet bij de uren, dan is de lamp uit. Bij het 2-knopje en het 3-knopje gaat het net zo.
Als het 2-knopje aan is, dan brandt de lamp als er een 2 op het urendisplay te zien is.
Als het 3-knopje aan is, dan brandt de lamp als er een 3 op het urendisplay te zien is.

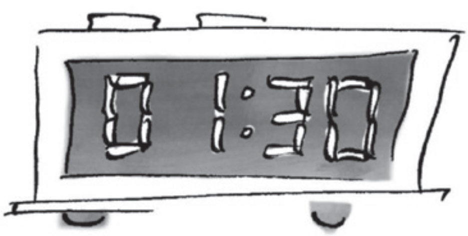
1 Hoe werkt de lamp, als het 1-knopje en het 2-knopje allebei ingeschakeld zijn?

Als het 1-knopje en het 2-knopje allebei ingeschakeld zijn, dan brandt de lamp, zodra er op het urendisplay een 1 of een 2 te zien is. Allebei mag natuurlijk ook (bijv. 12:05 uur), maar één van beide is al voldoende.

Simon vraagt zich af hoe hij de lamp tijdens zijn afwezigheid zal inschakelen. Als de lamp ongeveer een derde deel van de tijd brandt, zo denkt hij, moet dat voldoende zijn om mogelijke inbrekers op afstand te houden. De vraag is nu: Hoe kan Simon de lamp het best inschakelen? Welke knopjes schakelt hij in, welke laat hij uit? Hint: Zowel bijvoorbeeld om 10:35 uur als om 23:47 uur brandt de lamp.

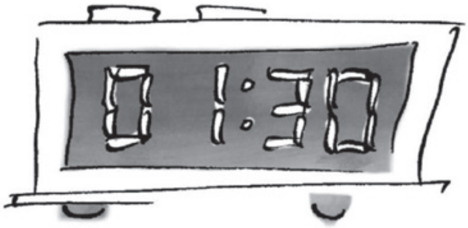
Denk je al genoeg te weten om dit probleem op te lossen, stop dan met lezen en ga aan de gang. Lees later verder om de andere vragen op te lossen en om te kijken of jouw manier naar hetzelfde antwoord leidt.
Wil je eerst enkele aanwijzingen om dit probleem aan te pakken, lees dan nu verder.

Kansen
Stel je een inbreker voor die overal binnen weet te komen, maar die geen flauw benul van de tijd heeft. Hij weet zelfs niet eens of het dag of nacht is. Die inbreker loopt langs het huis van onze uitvinder. Die heeft op de kloklamp alleen het 1-knopje aangezet.



2 Hoe groot is in dit geval de kans dat de lamp brandt?

De kans dat de lamp brandt is $\frac{12}{24} = \frac{1}{2} = 50\%$



Deze vraag kun je ook anders stellen.
Net als in Les 11 kun je onderzoeken welk deel van alle mogelijkheden het gezochte resultaat geeft.

$$\text{de kans op een 1 op het urendisplay} = \frac{\text{het aantal mogelijkheden met een 1 op het urendisplay}}{\text{het totaal aantal mogelijke getallen op het urendisplay}}$$

Het totaal aantal mogelijke getallen op het urendisplay is 24, er zijn 24 uren van 00 tot en met 23. (We gaan ervan uit dat de klok na 23:59 uur verspringt naar 00:00 uur.)
Alle 24 mogelijkheden hebben een even grote kans, elk uur duurt even lang.

3 In hoeveel van die 24 uren komt het cijfer 1 voor? In 12 uren.

4 Hoe groot is dus de kans op een 1 op het urendisplay?

Die kans is zie tekst

Als je het goed berekend hebt, dan vond je het volgende:

Het cijfer 1 komt in 12 van de 24 uren voor, namelijk in 01, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 en in 21.

De kans op een 1 op het urendisplay is $\frac{12}{24} = \frac{1}{2} = 50\%$.

5 Hoe groot is de kans dat de lamp brandt, als alleen het 2-knopje aan staat? Die kans is $\frac{6}{24} = \frac{1}{4} = 25\%$.

Bij 02, 12, 20, 21, 22 en 23 staat er een 2 op het urendisplay.

6 Hoe groot is de kans dat de lamp brandt, als alleen het 3-knopje aan staat? Die kans is $\frac{3}{24} = \frac{1}{8} = 12{,}5\%$.

Bij 03, 13 en 23 staat er een 3 op het urendisplay.

Nu komen we terug bij de vraag welke knopjes Simon moet inschakelen.
Hij wil dat de lamp ongeveer een derde deel van de tijd brandt. Bij de antwoorden op de vragen 4, 5 en 6 was nergens het antwoord $\frac{1}{3}$. In geen van de gevallen was de kans $33\frac{1}{3}\%$.

7 Bij welke instelling van de knopjes is de kans dat de lamp brandt wel $\frac{1}{3}$?
Welke knopjes moeten aan staan, welke uit?

Tip: Onderzoek eerst welke van de drie knopjes aan moeten staan en vooral ook welke uit. Noteer onder ieder knopje of het aan is of uit. Op welke uren brandt de lamp als de twee goede knopjes aan staan? Hoeveel uren is dat per 24 uur?

1-knopje 2-knopje 3-knopje

Als het 1-knopje aan staat, dan brandt de lamp al te veel, namelijk de helft van de tijd. $33\frac{1}{3}$ % kan dus alleen met de andere twee knopjes bereikt worden.

Bij welke uren (van 00 tot en met 23) brandt de lamp? Als het 2-knopje aan en het 3-knopje aan is, dan brandt de lamp bij de uren 2, 3, 12, 13, 20, 21, 22 en 23. (dan staat er een 2 of 3).

Hoeveel uren brandt de lamp (per 24 uur)? De lamp brandt dan 8 van de 24 uren.

Is dat een derde deel van de tijd? Ja, $\frac{8}{24} = \frac{1}{3} = 33\frac{1}{3}$%.

Dus op welke manier zal Simon Buis de lamp inschakelen?
Simon Buis laat het 1-knopje uit en doet het 2-knopje en het 3-knopje aan.

Ten slotte maken we voor de liefhebber het probleem nog wat pittiger. Simon Buis heeft zijn lamp bijgesteld. Het gaat niet meer alleen om de uren op het display, maar ook om de minuten. Als nu het 1-knopje aan is, dan brandt de lamp, zodra het display van de klok een 1 laat zien. Of dat nu bij de uren of bij de minuten is, dat maakt niet uit. Als er maar ergens een 1 staat.

Dezelfde inbreker loopt weer langs het huis van onze uitvinder. Die heeft op de bijgestelde kloklamp alleen het 1-knopje aangezet.

8 Hoe groot is nu de kans dat de lamp brandt?

De kans dat de lamp nu brandt is In de helft van alle gevallen staat er een 1 bij de uren, dat is al 50%.
Bij de rest van alle gevallen kijken we naar de minuten.
Van elke 60 minuten in een uur zijn er 15 met een 1:
01, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 21, 31, 41 en 51.
Dus van de rest heeft een kwart van alle minuten een 1.
De kans dat nu de lamp brandt = $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ ($\frac{1}{4}$ van $\frac{1}{2}$) = $\frac{5}{8}$ = 50% + $12\frac{1}{2}$ % = $62\frac{1}{2}$ %.

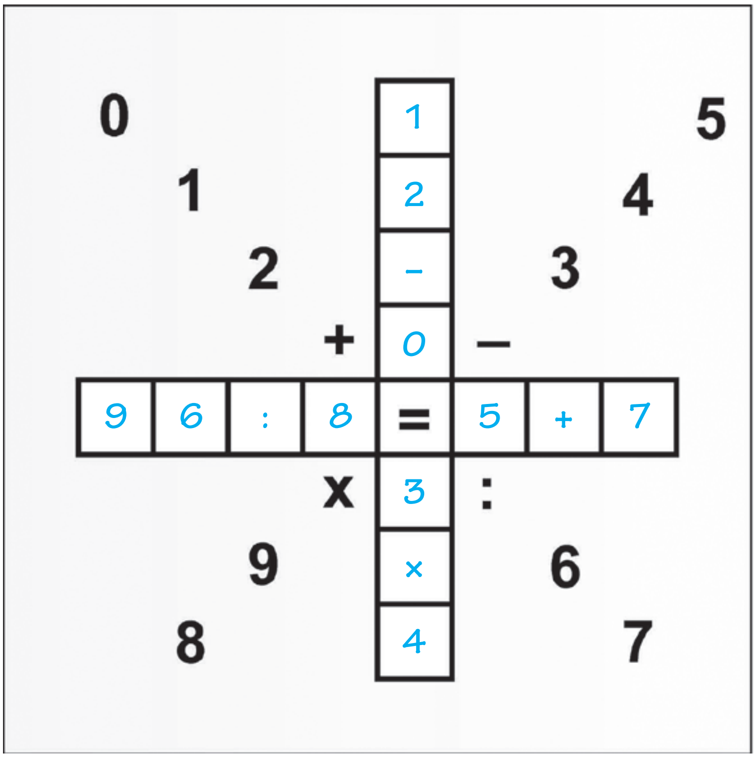
Les 16 Logisch denken

De laatste les van dit boekje is een puzzelles. Natuurlijk gaat het hier om puzzels die met rekenen te maken hebben. Veel puzzels zijn op te lossen door logisch na te denken en goed te combineren.
Het kan voorkomen dat je in het begin helemaal niet weet hoe je het probleem moet aanpakken. En na een tijdje hersenarbeid komt er dan ineens een helder idee boven.
Waar een ander een hint of tip nodig heeft, heb jij jezelf op het goede spoor gebracht.
We zijn benieuwd of jou dat lukt. Veel puzzelplezier!

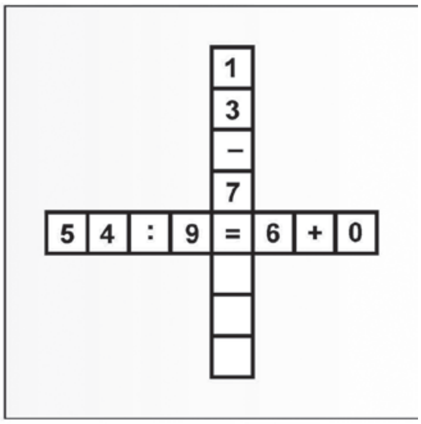
Puzzel 1

Vul in onderstaande figuur in ieder hokje één cijfer of teken in.
Elk cijfer en elk teken moeten precies één keer ingevuld worden.
Maak zo in iedere wiek een som met dezelfde uitkomst.
Als je een 4 rechts naast een 5 invult, moet je dat lezen als 54.
Zie het voorbeeld in de figuur rechts.
In drie wieken lees je 54 : 9 = 13 – 7 = 6 + 0.
Maar helaas, nu kom je met 2 × 8 niet aan dezelfde uitkomst.

Lukt het jou wel om in alle vier de wieken een som met dezelfde uitkomst te krijgen?



Voorbeeld



Het is verstandig om eerst (op klad) een aantal invulmogelijkheden uit te proberen. Daardoor kom je op het spoor van combinaties die echt niet kunnen, maar waarschijnlijk zie je ook mogelijkheden die bijna kloppen. Dan ben je misschien al in de buurt van de goede oplossing. Als je er na veel proberen echt niet uitkomt, gebruik dan de hint op de volgende bladzijde.

Puzzel 2

5
5 5
5 4 5
4 4 2 2
5 4 5 5 5
5 5 3 5 3 3
5 5 3 5 3 4 1
4 4 3 4 4 4 3 3
5 5 4 2 5 5 5 4 3
5 5 5 4 2 5 5 4 4 4

Hoe moet je de puzzel maken?

- Je moet in elk hokje van de driehoek een cijfer invullen.
- Die cijfers moeten groepjes vormen.

Wanneer vormen cijfers een groepje?

- De cijfers zijn hetzelfde, bijvoorbeeld drieën.
- De cijfers zijn met elkaar verbonden via hokjes die aan elkaar grenzen.

Welke groepjes moet je maken?

- 5 groepjes van 5 vijven,
- 4 groepjes van 4 vieren,
- 3 groepjes van 3 drieën,
- 2 groepjes van 2 tweeën,
- 1 losse één.

De soortgelijke groepjes mogen elkaar niet raken. Een groepje van 4 vieren bijvoorbeeld mag niet verbonden zijn met een ander groepje van 4 vieren. Dus in een groepje van vieren staan precies 4 vieren, niet meer en niet minder!

Hint voor puzzel 1: Het antwoord is steeds 12.

Toets 4

1 De buurman van Ko Nijn heeft voor Ko nog enkele stukjes grond over. Van enkele vierkante stukjes weet hij dat die voor Ko interessant zijn.
De buurman snapt dat voor vierkante wortels de oppervlakte heel belangrijk is.

a Welke lengte heeft een vierkant stukje met oppervlakte 81 cm^2? 9 cm. want $9 \times 9 = 81$.

b De buurman weet ook hoe Ko alles opschrijft. Bereken de wortel:

$\sqrt{4}$= 2 $\sqrt{64}$ = 8 $\sqrt{144}$= 12 $\sqrt{169}$= 13

c

200 cm^2	210 cm^2	225 cm^2	249 cm^2	250 cm^2	256 cm^2	275 cm^2	289 cm^2

15 cm → 16 cm → 17 cm →

De oppervlaktes uit dit rijtje horen allemaal bij vierkante stukjes grond.
Welke oppervlaktes zijn voor Ko geschikt?
Ofwel welke oppervlaktes hebben een heel getal als lengte?
Omcirkel er drie en zet de lengte van dat stuk onder de oppervlakte.

2 We zoeken naar eigenschappen die gelden voor alle getallen a en b.

a Is $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ zo'n eigenschap?

Vul in a = 4 en b = 6 en laat zien dat in dit geval $(a + b)^2$ niet hetzelfde is als $a^2 + b^2$.

$(a + b)^2 = (4 + 6)^2 = 10^2 = 100$ $a^2 + b^2 = 4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52$

b $\sqrt{(a \times b)} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ $\sqrt{(a + b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

Let op: eerst wat tussen haakjes staat uitrekenen, dan pas de wortel nemen.

En van deze twee formules is een eigenschap die klopt voor alle getallen a en b die groter zijn dan 0. De andere formule klopt niet voor alle getallen, hij klopt zelfs bijna nooit.
Welke van de twee formules klopt niet? Zoek zelf geschikte getallen om in te vullen (bijvoorbeeld kwadraten). Laat met die getallen zien welke formule niet klopt.

$\sqrt{(a \times b)} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ klopt voor alle getallen a en b groter dan 0.
$\sqrt{(a + b)} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ klopt niet, neem bijvoorbeeld a = 9 en b = 16: $\sqrt{(9 + 16)}$ $= \sqrt{25} = 5$.
$\sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = 7$. $\sqrt{(a \times b)} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ klopt wel voor a = 9 en b = 16:
$\sqrt{(9 \times 16)} = \sqrt{144} = 12$
$\sqrt{9} \times \sqrt{16} = 3 \times 4 = 12$

3 Er is elke dag maar één minuut dat een digitale klok 16:16 uur aangeeft.
De kans om op een willekeurig moment 16:16 te zien is dus niet zo groot.
Die kans kan wel groter zijn als je al enkele cijfers op de klok kunt zien.

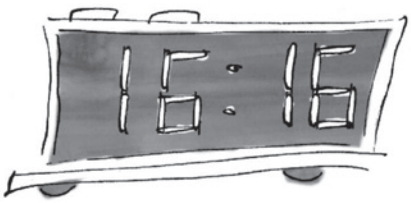
Op de plaats van het vraagteken staat het cijfer dat je niet kunt zien.
Hoe groot is de kans dat er over 5 minuten 16:16 op de klok staat,

a als je nu ?6:11 op de klok ziet? Die kans is 50%. Uitleg: Op de plaats van het vraagteken staat een 0 of een 1, er staat 06:11 of 16:11 op de klok. Bij 16:11 staat er over 5 minuten 16:16 op de klok. De kans daarop is $\frac{1}{2}$ of 50%, want 06:11 en 16:11 hebben een even grote kans om voor te komen.

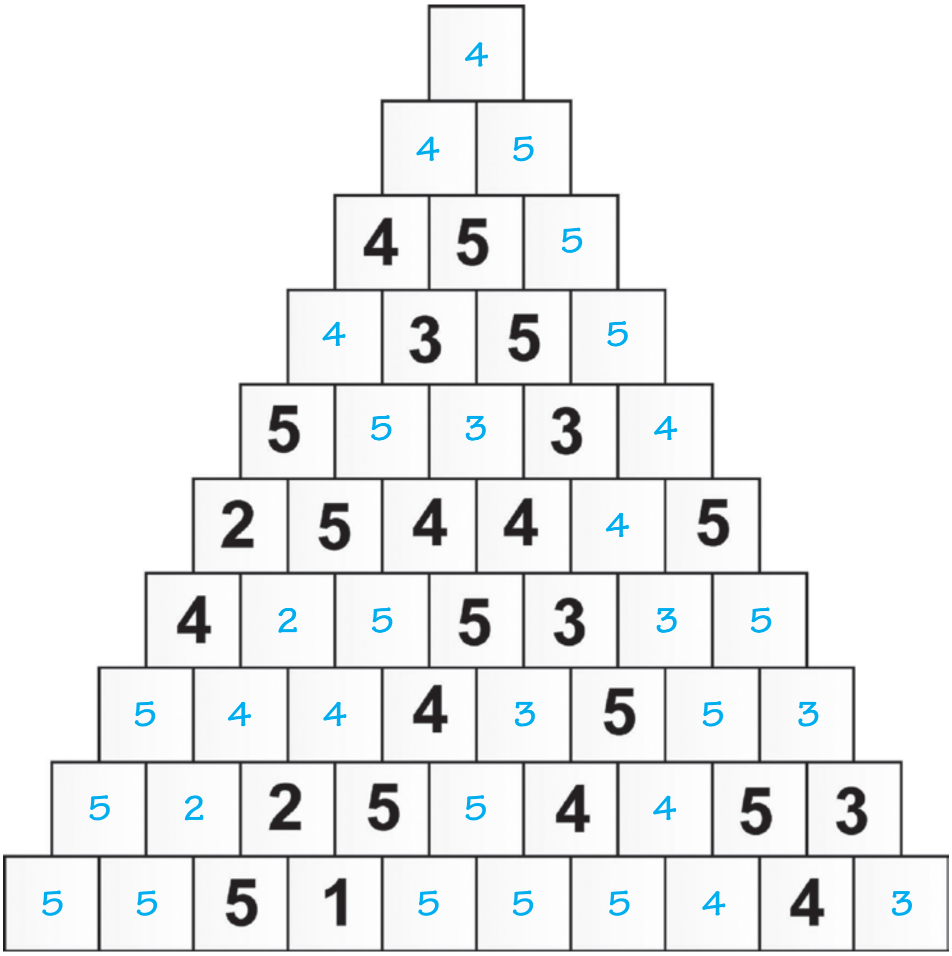
b als je nu 1?:11 op de klok ziet? Die kans is 10%. Uitleg: Op de plaats van het vraagteken kunnen alle cijfers van 0 tot en met 9 met een even grote kans voorkomen. Alleen als er een 6 staat, bij 16:11, dan staat er over 5 minuten 16:16 op de klok. De kans daarop is $\frac{1}{10}$ of 10%.

c als je nu 16:?1 op de klok ziet? Die kans is $16\frac{2}{3}$%. Uitleg: Op de plaats van het vraagteken staat een 0, 1, 2, 3, 4 of 5. Elk van deze zes mogelijkheden heeft een even grote kans om voor te komen. Als er een 1 staat, bij 16:11, dan staat er over 5 minuten 16:11 op de klok. De kans daarop is $\frac{1}{6}$ of $16\frac{2}{3}$%.

d als je nu 16:1? op de klok ziet? Die kans is 10%. Uitleg: Op de plaats van het vraagteken kunnen alle cijfers van 0 tot en met 9 met een even grote kans voorkomen. Alleen als er een 1 staat, bij 16:11, dan staat er over 5 minuten 16:16 op de klok. De kans daarop is $\frac{1}{10}$ of 10%.



4 Nu je de eerste drie opgaven gemaakt hebt, is er tijd voor een puzzel.
We zijn benieuwd hoe ver je komt.



Hoe moet je de puzzel maken? Het gaat net als bij de puzzel uit de laatste les.

- Je moet in elk hokje van de driehoek een cijfer invullen.
- Die cijfers moeten groepjes vormen.

Wanneer vormen cijfers een groepje?

- De cijfers zijn hetzelfde, bijvoorbeeld drieën.
- De cijfers zijn met elkaar verbonden via hokjes die aan elkaar grenzen.

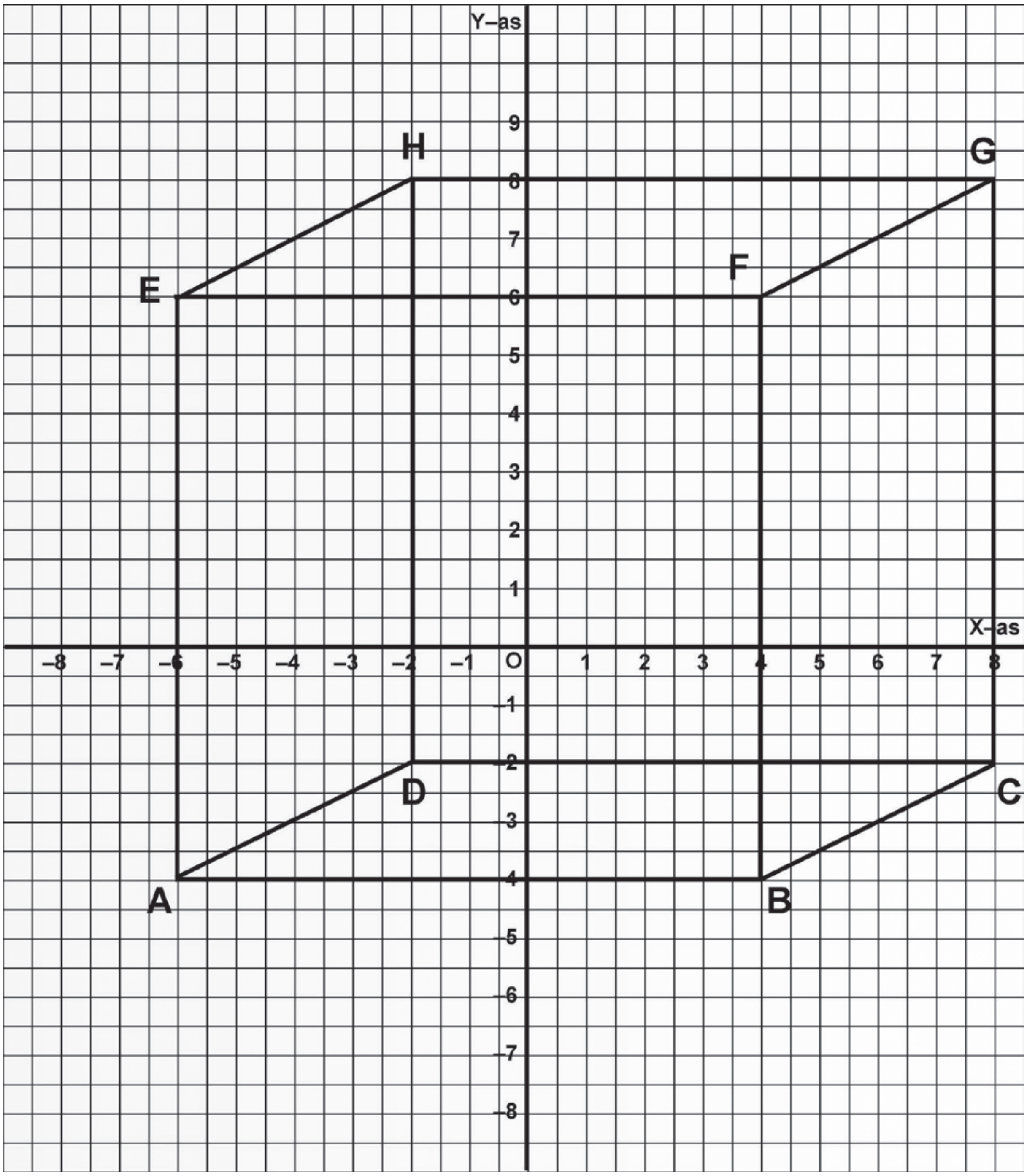
Welke groepjes moet je maken?

- 5 groepjes van 5 vijven,
- 4 groepjes van 4 vieren,
- 3 groepjes van 3 drieën,
- 2 groepjes van 2 tweeën,
- 1 losse één.

Zo moeten dus in een groepje van vieren precies 4 vieren staan, niet meer en niet minder!

Eindtoets A

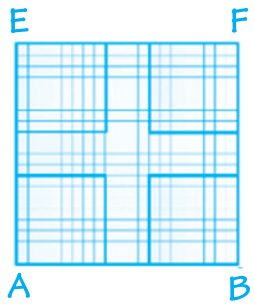
Deze eindtoets A bestaat uit acht opgaven. In al die opgaven speelt de onderstaande figuur een rol. Bij enkele opgaven wordt een afstand in centimeters genoemd. De afstand tussen O en 1 is 1 cm.



1 Wat zijn de coördinaten van de punten A, B, C, D, E, F, G en H?

A = (–6 , –4) B = (4 , –4) C = (8 , –2) D = (–2 , –2)

E = (–6 , 6) F = (4 , 6) G = (8 , 8) H = (–2 , 8)



2 **a** Hoeveel vierkanten met lengte 4 cm kun je op vlak ABFE leggen?
De vierkanten mogen nergens over elkaar heen liggen.
4 vierkanten. 4 vierkanten van 16 cm^2, bijvoorbeeld zo:

b Als al die vierkanten uit opgave 2a op vlak ABFE liggen, dan wordt een deel van vlak ABFE niet bedekt. Hoe groot is de totale oppervlakte van dat deel? $100\text{ cm}^2 - (4 \times 16\text{ cm}^2) = 100\text{ cm}^2 - 64\text{ cm}^2 = 36$ cm^2.

c Een vierkant heeft de oppervlakte die je in opgave 2b gevonden hebt.
Hoe groot is de lengte van dat vierkant? 6 cm, want $6 \times 6 = 36\text{ cm}^2$.

3 Bij elk punt (x,y) kun je het gemiddelde van de x-coördinaat en de y-coördinaat uitrekenen.

a Bij welke van de punten A, B, C, D, E, F, G, H is dat gemiddelde 3?
Bij C: $(8 + -2) : 2 = 6 : 2 = 3$ en bij H: $(-2 + 8) : 2 = 6 : 2 = 3$

b Hoe groot is dat gemiddelde bij punt D? De x-coördinaat van D is even groot als de y-coördinaat, beide –2. Bij D is het gemiddelde dus –2.
En bij E? Het gemiddelde van de x-coördinaat en de y-coördinaat bij E is 0.
$(-6 + 6) : 2 = 0 : 2 = 0$.

4 **a** Wat voor vierhoeken zijn EFGH en BCGF? EFGH en BCGF zijn parallellogrammen.

b Hoe groot is de oppervlakte van vierhoek EFGH? $10 \times 2 = 20$ cm^2.
De oppervlakte van een parallellogram is breedte x hoogte.

c Hoe groot is de oppervlakte van vierhoek BCGF? $10 \times 4 = 4$ cm^2.
Beschouw FB als de breedte van parallellogram BCGF.
De hoogte is dan 4 cm, dat kun je op de x-as goed zien.

5 Je werpt twee keer met een dobbelsteen.
Op de zes zijvlakken van de dobbelsteen staan de getallen –4, –5, –6, 4, 5 en 6.
Wat je in de eerste worp gooit, stelt de x-coördinaat van een punt voor.
Wat je in de tweede worp gooit, stelt de y-coördinaat van een punt voor.

a Hoe groot is de kans dat je in de eerste worp een x-coördinaat gooit van een van de punten A, B, C, D, E, F, G, H? Die kans is $\frac{1}{3}$. Uitleg: Alleen 4 en –6 komen voor op de dobbelsteen én als x-coördinaat van een van de genoemde punten. De kans op 4 of –6 is $\frac{1}{3}$ (twee van de zes mogelijkheden).

b Hoe groot is de kans dat je met je twee worpen een x-coördinaat en een y-coördinaat gooit zó, dat (x,y) een van de punten A, B, C, D, E, F, G of H is? Die kans is $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. Uitleg: Er zijn 6 mogelijkheden voor worp x en er zijn 6 mogelijkheden voor worp y. Dus $6 \times 6 = 36$ mogelijkheden voor een worpencombinatie (x,y). De punten A, B, E en F vormen vier van die mogelijkheden. De kans op één van die vier is $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$. De punten C, D, G en H kunnen niet geworpen worden.

c Hoe groot is diezelfde kans uit opgave 5b, als je zelf mag kiezen welke van de twee worpen de x-coördinaat is? De andere worp geldt dan als y-coördinaat. Die kans is $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$. Uitleg:
Net als bij opgave 5b zijn er 36 mogelijkheden voor een worpencombinatie (x,y). Omdat je nu zelf mag kiezen wat de x-coördinaat wordt en wat de y-coördinaat, kun je het punt A = (−6,−4) maken van zowel de worpencombinatie (−6,−4) als ook van de worpencombinatie (−4,−6).
Zo ook heb je voor de punten B, E en F een dubbele kans. Er zijn nu dus acht mogelijkheden om op deze manier één van de punten A, B, E en F te werpen.
De kans daarop is $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$.

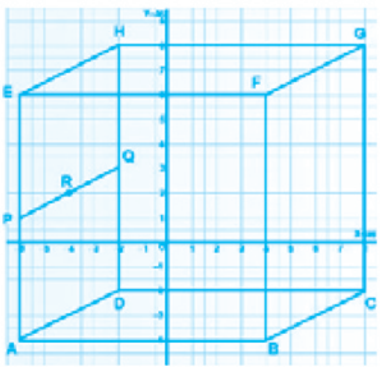
6 (x,y) is een punt met x als x-coördinaat en y als y-coördinaat.
Voor dit punt (x,y) geldt: x + y = 0 én x = √16.
Welk van de punten A, B, C, D, E, F, G, H wordt hier bedoeld? Punt B (4 , −4)
x = √16 = 4. x + y = 0, dus y = −x = −4.

7 Van vlieger BDAT zie je in het assenstelsel de hoekpunten B, D en A.
Het vierde hoekpunt T staat niet in het assenstelsel getekend. Wat zijn de coördinaten van T?
Punt T = (−2 , −6)
AD is even lang als AT en BD is even lang als BT. Je vindt het punt T door het punt D te spiegelen in de lijn AB.

8 **a** Het punt P ligt precies op het midden van lijnstuk EA. Punt P = (−6 , 1)
Zie afbeelding. De x-coördinaat van P is −6, net als bij E en A. De y-coördinaat van P is 1 en ligt precies tussen 6 en −4 in (de y-coördinaten van E en A).

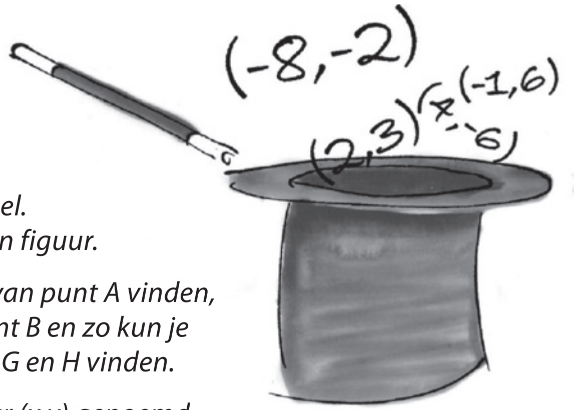
b Het punt Q ligt precies op het midden van lijnstuk HD. Punt Q = (−2 , 3)
Zie afbeelding. De x-coördinaat van Q is −2, net als bij H en D. De y-coördinaat van Q is 3 en ligt precies tussen 8 en −2 in (de y-coördinaten van H en D).

c Het punt R ligt precies op het midden van lijnstuk PQ. Punt R = (−4 , 2)
Zie afbeelding. De x-coördinaat van R ligt precies tussen −6 en −2 in (de x-coördinaten van P en Q). De y-coördinaat van R ligt precies tussen 1 en 3 in (de y-coördinaten van P en Q).



Eindtoets B

Het eerste deel van deze Eindtoets B bestaat uit acht opgaven. In die opgaven ga je op zoek naar acht getallenparen. Daarvan moet je steeds de x-coördinaat en de y-coördinaat vinden.



In het tweede deel van de toets gebruik je het assenstelsel. Daarin teken je met behulp van de gevonden punten een figuur.

In opgave 1 kun je de x-coördinaat en de y-coördinaat van punt A vinden, in opgave 2 de x-coördinaat en de y-coördinaat van punt B en zo kun je verder in de opgaven 3 tot en met 8 de punten C, D, E, F, G en H vinden.

Let op! *In alle opgaven wordt het gezochte getallenpaar (x,y) genoemd. De wortel uit een getal is nooit een negatief getal.*

1 Voor de x-coördinaat en de y-coördinaat van A geldt: $x = y$ én $-x = \sqrt{16}$.
Hoe groot is x en hoe groot is y?

A = (−4 , −4) $-x = \sqrt{16} = 4$, dus $x = -4$; $x = y$, dus $y = -4$; A = (−4, −4)

2 Voor B geldt: het gemiddelde van x en y is k, waarbij k de kans is dat een worp met twee gewone dobbelstenen in totaal minstens 2 oplevert én $x - y = 10$. Hoe groot is x en hoe groot is y?

B = (6 , −4) Een worp met twee gewone dobbelstenen levert in alle gevallen in totaal minstens 2 op. De kans k daarop is dus 1. Het gemiddelde van x en y is 1:
$\rightarrow (x + y) : 2 = 1 \rightarrow x + y = 2 \rightarrow x = 2 - y$ (I) Ook geldt: $x - y = 10 \rightarrow x = 10 + y$
(II) Uit I en II volgt: $2 - y = 10 + y \rightarrow y + y = 2 - 10 = -8 \rightarrow y = -8 : 2 = -4$
$x = 10 + y = 10 + -4 = 6$ B = (6,−4)

3 Voor C geldt: C ligt op de x-as én de kans dat je in twee worpen met een gewone dobbelsteen beide keren minstens x gooit is $\frac{1}{4}$.

C = (4 , 0) C ligt op de x-as, dus de y-coördinaat is 0. De kans dat je met een gewone dobbelsteen minstens 4 gooit, is $\frac{1}{2}$. De kans dat je in twee worpen beide keren minstens 4 gooit, is $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. In de tabel zie je dat een kwart van de mogelijkheden die situatie geeft, dus x = 4 en y = 0. C = (4,0)

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

4 Voor D geldt: D is het hoekpunt van een parallellogram, waarvan AB, BC, CD én DA de zijden zijn.

D = (−6 , 0) DC is even lang als AB en heeft dezelfde horizontale richting als AB.
De afstand van A naar B = 10. Hieruit volgt: D = (−6,0)

5 Voor E geldt: $x + 10 = y$ én $x + y = 2$.

E = (−4 , 6) $x + 10 = y \rightarrow y = x + 10$ (I) $x + y = 2 \rightarrow y = 2 - x$ (II)
Uit I en II volgt: $x + 10 = 2 - x \rightarrow x + x = 2 - 10 = -8 \rightarrow x = -8 : 2 = -4$.
$y = x + 10 = -4 + 10 = 6$ E = (−4,6)

6 Voor F geldt: x is groter dan 0 én $x = y$ én $x^2 + y^2 = 72$.

F = (6 , 6) $x = y \rightarrow x^2 = y^2$ (I) $x^2 + y^2 = 72$ (II)
Uit I en II volgt: $x^2 + x^2 = 72 \rightarrow x^2 = 72 : 2 = 36$.
x is groter dan 0, dus $x = \sqrt{36} = 6$; $y = x = 6$ F = (6,6)

7 Voor G geldt: $x + y = 14$ én $y = \sqrt{100}$.

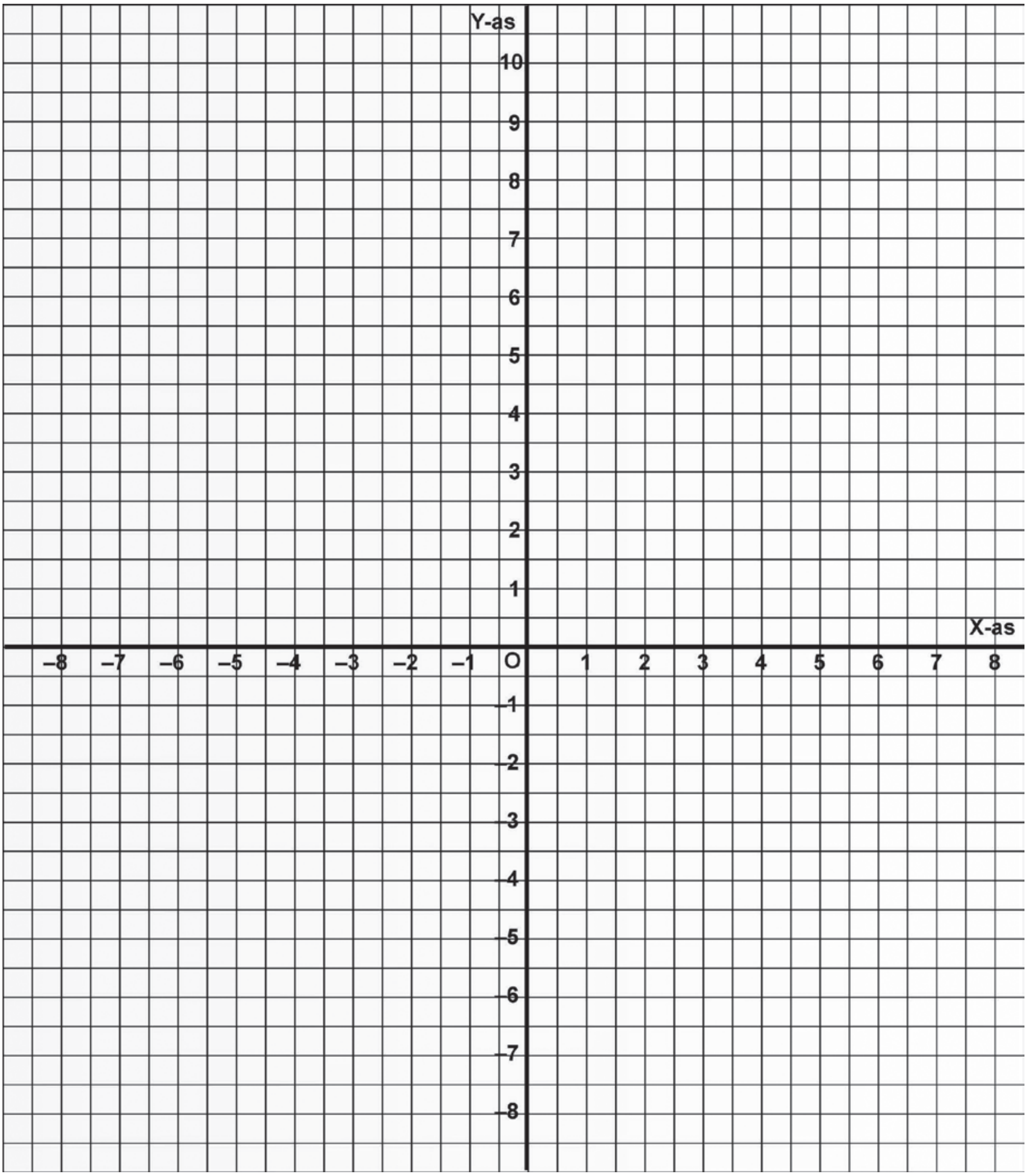
G = (4 , 10) $y = \sqrt{100} = 10$ $x + y = 14 \rightarrow x = 14 - y = 14 - 10 = 4$
G = (4,10)

8 Voor H geldt: $x = 0 + 4 - 17 - -21 + -14$ én $y = 0 - 9 - -15 - 2 + 7 + -1$

H = (−6 , 10) $x = 0 + 4 - 17 - -21 + -14 = -6$ $y = 0 - 9 - -15 - 2 + 7 + -1 = 10$
H = (−6,10)

Teken de punten A, B, C, D, E, F, G en H in het assenstelsel. Als je twee punten met elkaar verbindt, noem je dat een lijnstuk. Teken ook de lijnstukken AB, BC, CD, DA, de lijnstukken EF, FG, GH, HE en de lijnstukken EA, FB, GC en HD.

Wat voor figuur zie je nu? Een kubus.


Y-as
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
X-as
–8
–7
–6
–5
–4
–3
–2
–1
O
1
2
3
4
5
6
7
8
–1
–2
–3
–4
–5
–6
–7
–8