M–12

Mettre l'accent sur le RAISONNEMENT ALGÉBRIQUE

Document d'appui sur l'importance de l'enseignement des mathématiques

Table des matières

Mettre l'accent sur le raisonnement algébrique

Le raisonnement algébrique est un processus au cours duquel les élèves généralisent des idées mathématiques tirées d'un ensemble d'instances particulières, établissent des généralisations en procédant par argumentation et expriment ces généralisations selon des moyens de plus en plus formels et adaptés à leur âge.

(Kaput et Blanton, 2005, p. 99, traduction libre)

Le raisonnement algébrique est essentiel pour les élèves qui désirent progresser en mathématiques et en sciences (Greenes et coll., 2001). Une introduction au raisonnement algébrique dès le cycle préparatoire donne à tous les élèves davantage d'opportunités en mathématiques et dans leurs choix de carrière, et peut contribuer à faciliter la transition à l'algèbre formelle au secondaire, qui, selon les recherches, est difficile pour la plupart des élèves (p. ex., Kieran, 1992).

Le document Mettre l'accent sur l'enseignement des mathématiques donne un aperçu de ce qu'il faut pour aider les élèves de l'Ontario à approfondir leur apprentissage et mieux comprendre les mathématiques. Il présente sept principes fondamentaux pour planifier et réaliser des améliorations, et donne des exemples pour chacun de ces principes.

Le présent document se veut plus pratique. Il adopte une méthode concrète et se concentre sur le premier principe : *Mettre l'accent sur les mathématiques. Qu'est-ce que le raisonnement proportionnel?* est le premier document de cette série alors que *Mettre l'accent sur le raisonnement algébrique* est le second. D'autres documents traiteront d'autres sujets importants en lien avec l'enseignement et de l'apprentissage des mathématiques.

Le raisonnement algébrique établit un lien entre l'apprentissage et l'enseignement de l'arithmétique au niveau élémentaire et ceux des fonctions et du calcul au niveau secondaire. Il établit une base pour le développement d'une compréhension mathématique abstraite. Nous espérons que ce document suscitera des discussions et contribuera à l'apprentissage de ce sujet important et complexe, autant chez les collègues que chez les élèves de vos écoles en salle de classe.

SEPT PRINCIPES FONDAMENTAUX POUR AMÉLIORER L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES, DE LA MATERNELLE À LA 12e ANNÉE

- Mettre l'accent sur les mathématiques.
- Coordonner et consolider le leadership en mathématiques.
- Développer une compréhension de l'enseignement efficace des mathématiques.
- Soutenir les pratiques collaboratives d'apprentissage professionnel en mathématiques.
- Créer un environnement d'apprentissage propice aux mathématiques.
- Valoriser l'évaluation au service de l'apprentissage des mathématiques pour la réussite de tous les élèves.
- Faciliter l'accès aux ressources des mathématiques.

Pourquoi le raisonnement algébrique est-il important?

Le raisonnement algébrique sous-tend toute la pensée mathématique, y compris l'arithmétique, car il nous permet d'explorer la structure des mathématiques. Nous reconnaissons maintenant l'importance d'inclure le raisonnement algébrique dans l'enseignement des mathématiques dès un très jeune âge, afin de rendre accessibles à tous les élèves ces idées mathématiques très efficaces.

Nous avons tous la capacité de penser algébriquement, car le raisonnement algébrique constitue, essentiellement, la façon dont les humains interagissent avec le monde. Dans notre quotidien, nous recherchons des régularités, nous prêtons attention à des aspects importants de ces régularités, puis nous faisons des généralisations tirées de situations familières pour les appliquer à des situations peu familières. Le raisonnement algébrique est présent dans de nombreux aspects de nos vies; par exemple, faire des comparaisons pour trouver le fournisseur de téléphones cellulaires qui offre le meilleur contrat ou pour déterminer des temps et des distances lorsque nous conduisons. Le raisonnement algébrique est aussi utilisé dans de nombreuses carrières :

- Les architectes et les experts en construction utilisent le raisonnement algébrique pour concevoir des bâtiments et déterminer les matériaux nécessaires pour les construire.
- Les concepteurs de logiciels et les programmeurs utilisent le raisonnement algébrique pour créer des codes.
- Les banquiers utilisent l'algèbre pour calculer les paiements des hypothèques et les taux d'intérêt.
- Les scientifiques utilisent l'algèbre dans pratiquement tous les domaines.

Qu'est-ce que le raisonnement algébrique?

La pensée ou le raisonnement algébrique implique la formation de généralisations tirées d'expériences avec des nombres et des calculs, la formalisation de ces idées à l'aide d'un système de symboles significatifs et l'exploration des concepts de régularité et de fonction.

(Van de Walle, Karp, et Bay-Williams, 2011, p. 262)

Le raisonnement algébrique est présent dans tous les domaines mathématiques. Il consiste à décrire des régularités caractérisant des relations entre des quantités – contrairement à l'arithmétique, qui consiste à effectuer des calculs portant sur des quantités connues. En gros, le raisonnement algébrique concerne la généralisation d'idées mathématiques et l'identification de structures mathématiques.

Bien que l'algèbre symbolique formelle soit introduite dans le curriculum de mathématiques de l'Ontario à la fin du cycle moyen, le raisonnement algébrique devrait être favorisé et cultivé dès la maternelle. Le raisonnement algébrique est parfois envisagé comme étant uniquement une manipulation de symboles et il est seulement enseigné au secondaire. Toutefois, la plupart des enseignantes et enseignants pensent que l'on devrait encourager les élèves à mieux comprendre l'algèbre avant de leur inculquer les rudiments de la représentation et de la manipulation symboliques formelles. Par exemple, lorsque les élèves du primaire remarquent que changer l'ordre de deux nombres dont on fait la somme ne modifie pas le résultat quel que soit ces nombres, ils portent leur attention sur la structure de la relation plutôt que sur les nombres avec lesquels ils travaillent. Cette attention sur la propriété généralisée de l'addition (la propriété de commutativité) fait partie du raisonnement algébrique ($3 + 4 = 4 + 3$).

Le raisonnement algébrique est fondé sur notre capacité à remarquer l'existence de régularités et d'effectuer des généralisations à partir de celles-ci. L'algèbre est le langage qui nous permet d'exprimer mathématiquement ces généralisations. Des formules, telles que pour calculer l'aire de la surface du rectangle = base × hauteur ($A = b \times h$), sont déduites de telles généralisations.

« La généralisation est au cœur des mathématiques et se manifeste sous de nombreuses formes. Si les enseignantes et enseignants ne sont pas conscients de son existence et qu'ils n'ont pas l'habitude de demander aux élèves d'exprimer leurs propres généralisations, la pensée mathématique n'est pas présente. » (Mason, 1996, p. 65).

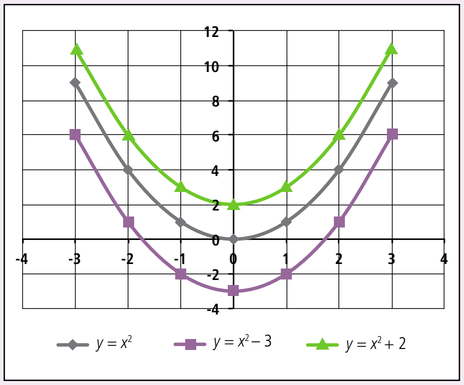
Examinons quelques exemples de généralisations.

Ajouter un zéro à un nombre ne modifie pas la valeur de ce nombre. Un élève peut dire : « J'ai ajouté un zéro à plusieurs nombres et cela n'a changé aucun d'entre eux! » Un nombre plus zéro reste inchangé. Cet élève vient de faire un apprentissage important à l'aide d'une généralisation. L'algèbre nous permet d'exprimer cette généralisation de diverses façons, notamment, concrètement à l'aide d'images, graphiquement et symboliquement ($n + 0 = n$). Cette expression algébrique représente le fait que quelle que soit la quantité n, l'ajout de zéro ne la modifiera jamais.

Dans de nombreux contenus d'apprentissage du programme-cadre, on s'attend à ce que les élèves puissent explorer une relation et développer des généralisations pour favoriser leur compréhension conceptuelle de la relation représentée par une formule. Cette généralisation constitue un apprentissage important pour les élèves. La formule est le résultat du raisonnement algébrique de l'élève et ne devrait pas être le seul but de l'apprentissage. Par exemple, lorsque des élèves examinent le périmètre d'un rectangle, ils peuvent en venir à comprendre de diverses façons que ce périmètre est la somme des côtés. Ils peuvent l'exprimer de la façon suivante : périmètre = b + b + h +h, périmètre = 2 × base + 2 × hauteur ou encore périmètre = base + hauteur + base + hauteur. Toutes ces expressions sont valides et donnent aux élèves une meilleure flexibilité à reconnaître quand la généralisation de P = 2 (b × h) devrait être utilisée. De plus, cela leur permet de développer et d'affiner leur capacité à raisonner algébriquement, de comprendre l'origine de la formule et de savoir comment l'adapter à des situations particulières.

Au secondaire, les élèves raisonnent algébriquement lorsqu'ils établissent des relations entre l'équation et la représentation graphique d'une fonction. Les élèves peuvent utiliser la technologie pour étudier divers graphiques afin de comprendre que $y = x^2 + b$ est une translation verticale de b unités de l'expression $y = x^2$ (fig. 1).

Figure 1 *Translations verticales de fonctions quadratiques*



Le raisonnement algébrique nous permet de manipuler n'importe quelle quantité inconnue comme si cette quantité était connue, contrairement au raisonnement arithmétique, qui implique des opérations sur des quantités connues. L'algèbre a pour objectif principal l'étude des *relations* entre des quantités (que nous appelons des variables) et la capacité de représenter ces diverses relations.

L'habileté à raisonner de façon algébrique permet aux élèves d'examiner des situations et d'organiser leur pensée. Alors que l'arithmétique est généralement perçue comme un calcul sur des quantités connues, visant à trouver la bonne réponse, le raisonnement algébrique vise à mieux comprendre la numération en permettant d'analyser les relations entre les nombres pour trouver la valeur d'une inconnue.

Le raisonnement algébrique est important, car il fait passer la compréhension que l'élève possède des mathématiques au-delà du résultat de calculs particuliers et de l'application procédurale de formules. Les élèves ont besoin de temps pour étudier divers exemples au moyen desquels des généralisations peuvent être établies et appliquées avec souplesse dans leur apprentissage ultérieur.

Il existe différentes approches pour développer le raisonnement algébrique chez les élèves. Ce document examine deux approches – la généralisation de l'arithmétique et la pensée fonctionnelle. Ces deux approches font partie intégrante des 3 processus fondamentaux – abstraction, généralisation et opération sur l'inconnue et sur les variables – du développement du raisonnement algébrique.

Le raisonnement algébrique – Une généralisation de l'arithmétique

La *généralisation de l'arithmétique* est le raisonnement sur des opérations et des propriétés associées à des nombres (Carpenter, Franke, et Levi, 2003). La généralisation de l'arithmétique consiste à aller au-delà des calculs de nombres particuliers pour explorer la structure mathématique sous-jacente de l'arithmétique en identifiant les régularités trouvées en arithmétique. Dans cette optique, les élèves peuvent développer leur raisonnement algébrique de diverses façons. Cette section traite les sujets suivants :

- Exploration des propriétés et des relations
- Exploration de l'égalité en tant que relation entre des quantités
- Utilisation des symboles algébriques comme variables

Exploration des propriétés et des relations

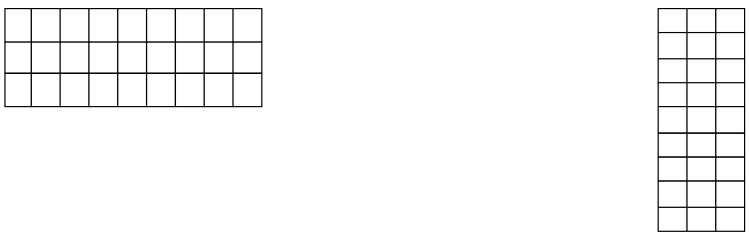
D'autres propriétés générales des nombres pouvant être examinées algébriquement sont celles des nombres premiers ou des nombres composés et la divisibilité.

En raisonnant de façon algébrique, nous explorons les propriétés des nombres et les relations entre eux ainsi que l'effet des opérations sur ces nombres. Dans une approche algébrique de l'arithmétique, il est important de considérer les règles arithmétiques comme étant des propriétés ou des principes généraux. Plutôt que de se concentrer sur les résultats de calculs particuliers, par exemple, 2 + 2 = 4, les élèves peuvent réfléchir aux propriétés des nombres. Par exemple, ils peuvent penser aux résultats possibles provenant de l'addition de différentes combinaisons de nombres pairs et impairs : impair + impair = pair, pair + pair = pair, impair + pair = impair. Plutôt que de penser à des exemples particuliers d'addition de nombres pairs et impairs, les élèves exercent leur pensée algébrique lorsqu'ils remarquent la régularité des résultats quand ils ajoutent des nombres pairs à des nombres impairs. Lorsque des élèves peuvent exprimer cette régularité et comprendre pourquoi elle est vraie pour la somme de toute paire de nombres constituée d'un nombre pair et d'un nombre impair, ils ont effectué une généralisation.

Les élèves peuvent aussi porter leur attention sur les opérations incluant des nombres entiers. De très jeunes élèves peuvent découvrir la propriété commutative de l'addition (a + b = b + a). Une régularité semblable peut être mise en évidence lorsque l'on multiplie deux nombres ($a \times b = b \times a$). Un tableau constitue un excellent outil pour prouver cette propriété (fig. 2).

Figure 2 *Propriété commutative de la multiplication ($a \times b = b \times a$)*

3 groupes de *9 carrés* = 27 carrés → 9 groupes de *3 carrés* = 27 carrés



En quoi cela est-il important?

Plutôt que de demander aux élèves de mémoriser des propriétés ou des règles, il est important de leur donner l'opportunité d'analyser de nombreux cas particuliers pour les amener à dépasser ces cas particuliers et arriver à penser à la généralisation mathématique sous-jacente (Beatty et Bruce, 2012; ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005). Les élèves peuvent ainsi remplacer des cas particuliers par une régularité; par exemple, 9 + 9 = 18, 7 + 7 = 14, 3 + 5 = 8 est remplacé par impair + impair = pair, car, pour chaque cas, la somme de deux nombres impairs donne un nombre pair. De même, comprendre que l'ordre n'a aucune incidence sur le produit de deux nombres permet aux élèves de faire plus facilement des multiplications – par exemple, ils peuvent découvrir que le résultat de $4 \times ½$ est plus facile à trouver lorsqu'on l'exprime sous la forme de $½ \times 4$ (une moitié de 4).

L'objectif de l'apprentissage des élèves devient la compréhension des propriétés des nombres et des opérations sur ceux-ci plutôt que le fait d'effectuer des calculs. Ce changement permet aux élèves d'appliquer leurs connaissances à d'autres systèmes de nombres (p. ex., fractions, décimales, nombres entiers) et à des situations algébriques. De plus, les élèves du secondaire auxquels on présente des concepts algébriques plus abstraits (p. ex., $y = mx + b$) seront capables de se servir de leurs expériences antérieures avec les nombres pour les appliquer à leur nouvel apprentissage et dans d'autres contextes.

Exploration de l'égalité en tant que relation entre des quantités

Les recherches démontrent que de nombreux élèves ne reconnaissent pas que le signe égal indique une égalité. Cela a été illustré dans l'exemple ci-dessous, pour lequel la plupart des élèves ont interprété le symbole égal comme étant synonyme d'effectuer un calcul et inscrire la réponse après le symbole égal.

Les enseignantes et enseignants disposent de plusieurs moyens pour établir que le symbole = indique la relation d'égalité. Par exemple, lorsque les élèves travaillent avec des phrases mathématiques, ils peuvent évaluer celles-ci comme étant vraies ou fausses (Carpenter, Franke et Levi, 2003, p. 6). Dans ce cas, on ne demande pas aux élèves d'effectuer des calculs, mais plutôt de déterminer si la phrase mathématique est vraie ou fausse. Une série de phrases mathématiques vraies/fausses présentées aux élèves pourrait être :

3 + 4 = 7 5 + 1 = 7 7 = 3 + 4 4 + 3 = 5 + 2

Au début, la plupart des élèves indiqueront que le premier énoncé est vrai. Le second énoncé peut sembler vrai si les élèves portent leur attention sur la forme ou faux s'ils portent leur attention sur le calcul. Les élèves diront généralement que le troisième énoncé est « à l'envers », car l'expression est du côté droit : « Comment est-il possible d'avoir la réponse avant d'avoir fait la somme? » Généralement au départ, les élèves penseront que le quatrième exemple est illogique. Toutefois, après avoir compris le sens du symbole égal comme indiquant que les énoncés numériques de chaque côté du symbole sont égaux (et non pas identiques) la plupart des élèves pourront facilement accepter les énoncés numériques dans lesquelles la « réponse » ne se trouve pas immédiatement après le signe égal.

Figure 3 *Élève étudiant l'égalité à l'aide d'une balance mathématique*

Les balances mathématiques constituent un autre moyen de modéliser des problèmes, car elles permettent aux élèves de développer leur sens de l'égalité puisqu'il manipule concrètement des équations.

En quoi cela est-il important?

L'algèbre consiste à reconnaître les relations entre des quantités et des opérations. Lorsque des élèves travaillent avec des équations, il est impératif qu'ils comprennent que le signe égal représente une relation entre des quantités plutôt qu'un symbole indiquant qu'il faut effectuer un calcul. Les élèves qui arrivent à le comprendre peuvent comparer des problèmes tels que les suivants sans devoir effectuer les calculs:

$2 \times \underline{\hspace{1cm}} + 15 = 31$

$2 \times \underline{\hspace{1cm}} + 15 - 9 = 31 - 9$

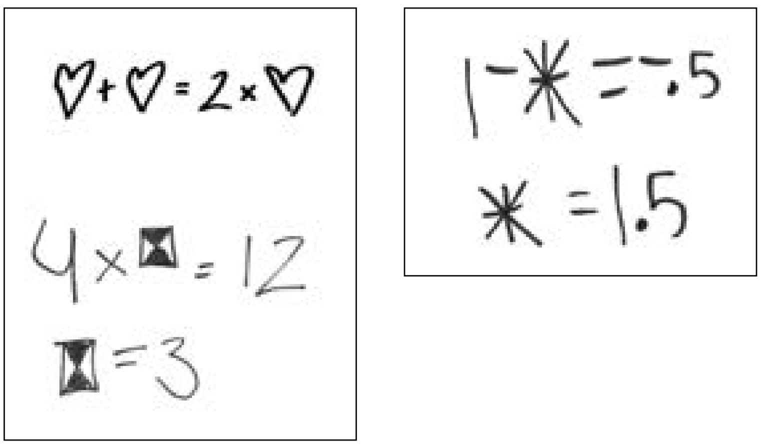
Ils peuvent porter leur attention sur l'équivalence des deux équations (raisonnement algébrique) plutôt que comparer les deux réponses (raisonnement arithmétique). Les élèves qui ont réussi à comprendre la signification du signe égal concluront que la valeur de _____ dans les deux équations est la même, car la soustraction de 9 dans les expressions des deux côtés de la deuxième équation ne change en rien la relation d'égalité entre les deux expressions.

Utilisation des symboles algébriques comme variables

Les généralisations sont au cœur du raisonnement algébrique et elles sont exprimées par des symboles. Traditionnellement, l'algèbre a souvent été présentée au secondaire comme une syntaxe prédéterminée de règles et un langage symbolique devant être mémorisé par les élèves. On s'attendait à ce que les élèves maîtrisent la manipulation symbolique avant d'apprendre quels étaient le but et l'utilisation des symboles. Autrement dit, on a présenté l'algèbre aux élèves en leur donnant peu de possibilités de l'explorer ou d'y trouver un sens. Toutefois, le curriculum de mathématiques de l'Ontario stipule qu'il faut proposer aux élèves une gamme de possibilités d'exploration et de recherche de sens.

Les jeunes apprenantes et apprenants peuvent commencer à utiliser leurs propres symboles (p. ex., étoiles, cœurs, arbres) de façon informelle. Les élèves peuvent explorer de nombreux exemples d'une propriété de l'arithmétique, puis utiliser des symboles pour décrire cette propriété (fig. 4). Ce type de raisonnement de plus haut niveau permet aux élèves de mieux comprendre les propriétés de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division ainsi que des relations entre les opérations.

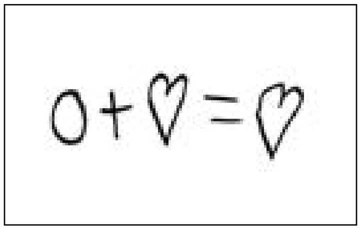
Figure 4 *Les jeunes apprenantes et apprenants utilisent leurs propres symboles*



Au fil de leur apprentissage, les élèves utilisent des symboles pour commencer à faire des modélisations et des généralisations sur des systèmes mathématiques de plus en plus complexes (p. ex., en passant des relations linéaires aux relations non linéaires, des nombres réels aux nombres complexes). L'utilisation de représentations symboliques formelles, telles que des équations, permet aux élèves d'accéder à ces concepts plus abstraits. Plus tard, les élèves utiliseront des lettres (p. ex., c, h, t) à la place de symboles (p. ex., étoiles, cœurs, arbres). Ces lettres peuvent représenter une valeur inconnue par exemple, $3 + c = 12$, des variables, par exemple, $a + b = 12$.

Des variables peuvent aussi être utilisées pour représenter la propriété d'un nombre ($a + 0 = a$) (fig. 5) ou la structure mathématique sous-jacente d'une généralisation (la somme de deux nombres consécutifs est toujours un nombre impair [$m + (m + 1) = 2m + 1$]). Dans ces cas, m est une variable qui peut être remplacée par n'importe quel nombre. Un moyen d'aider les élèves à comprendre cette utilisation des variables est de leur demander : « Pouvez-vous penser à une équation qui est vraie quels que soient les nombres que vous choisissez pour remplacer les variables? »

Figure 5 *Propriété de l'ajout du zéro*



L'emploi de tels énoncés permet aux élèves de mieux comprendre que les lettres peuvent représenter plusieurs valeurs plutôt qu'une valeur particulière. Il est important que les enseignantes et enseignants aident les élèves à comprendre la différence ces deux types de variables – la variable qui représente un ensemble de valeurs ($x + y = 5$) et la variable qui représente une valeur particulière et qu'on nomme l'inconnue ($x + 4 = 5$)

En quoi cela est-il important?

Lorsque les élèves comprennent les diverses façons dont ils peuvent utiliser les variables, ils en viennent à être capables de mieux les manipuler. De même, peu importe la variable choisie pour un problème donné, l'important c'est que cette variable ait toujours le même sens dans le problème donné. La valeur associée à une variable particulière dans un problème peut être différente dans un autre problème. Comme il n'existe aucune relation entre la variable choisie et une valeur donnée, il est courant d'utiliser souvent les mêmes variables ou lettres de façon répétée, soit *x*, *y* et *z* ou *a*, *b* et *c*. L'utilisation de symboles plutôt que de mots nous permet de simplifier le travail avec des expressions compliquées (p. ex., $\frac{x+3}{x-5} + \frac{x+8}{x-3} = 17$) et de plus facilement identifier les régularités qu'elles présentent.

Le raisonnement algébrique – La pensée fonctionnelle

La *pensée fonctionnelle* consiste à analyser des régularités (numériques et géométriques) pour identifier un changement et reconnaître la relation entre deux ensembles de nombres (Beatty et Bruce, 2012). Cette méthode implique l'étude de la façon dont certaines quantités sont liées à d'autres quantités, ou encore modifiées ou transformées par celles-ci.

La pensée fonctionnelle est une autre forme de généralisation. Une fonction est une relation particulière entre deux ensembles de données telle que, chaque élément d'un ensemble est associé à un élément unique d'un autre ensemble. La représentation visuelle des régularités (p. ex., carreaux, images) permet aux jeunes élèves de penser à des relations entre des quantités allant au-delà des calculs en l'arithmétique.

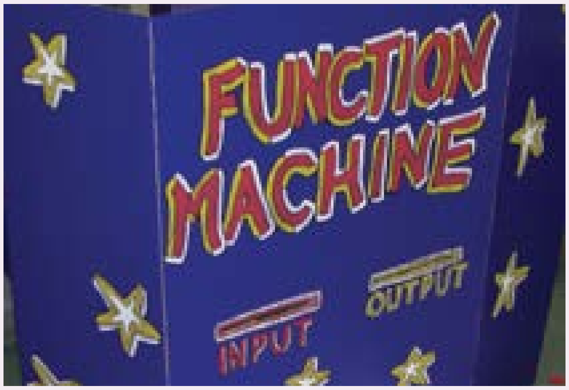
Les élèves peuvent développer leur pensée fonctionnelle de diverses façons. Dans ce document, nous étudions les moyens suivants :

- Généralisation des régularités
- Généralisation des suites non numériques
- Utilisation des opérations inverses

Généralisation des régularités

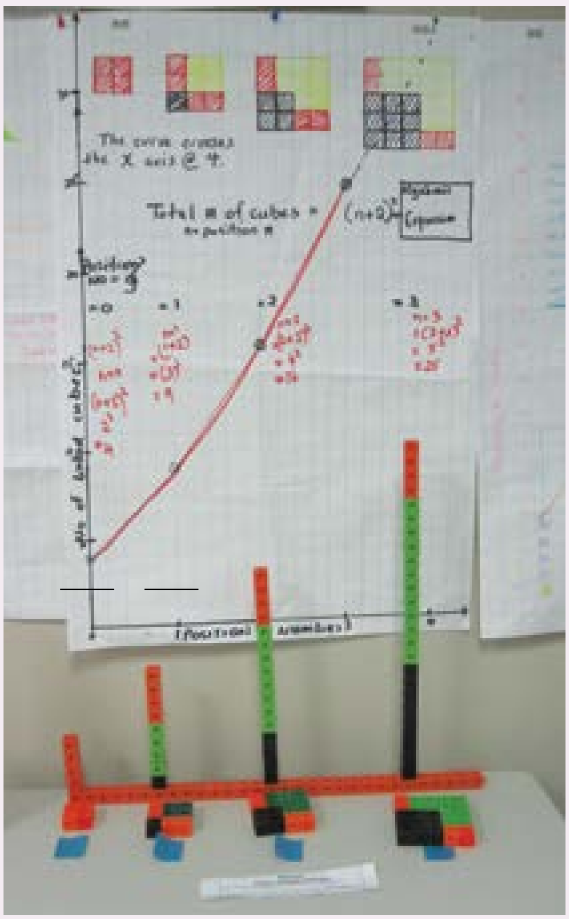
Des façons d’explorer la généralisation des régularités

Figure 6 *Apprendre avec une machine mystère*



Une machine mystère permet aux élèves de sélectionner des nombres à l’entrée qui sont ensuite transformés par une règle particulière en des nombres à la sortie. Cette tâche incite les élèves à penser à la relation qui est vraie pour toutes les paires d’entrée-sortie.

Figure 7 *Établir un lien entre le visuel et le symbolique*



Les élèves plus âgés établissent des liens entre les représentations visuelles et les représentations symboliques, ce qui leur permet d’explorer les propriétés des fonctions et notamment des opérations inverses.

Généralisation des suites non numériques

Les suites non numériques à motif répété constituent pour les très jeunes élèves un moyen de découvrir des généralisations *à l'intérieur* d'une même suite, par exemple, en déterminant ce qui suit ou quelle partie se répète (pensée récursive). Ce type de pensée est à la base de la compréhension de la structure mathématique et favorise le développement de la pensée additive.

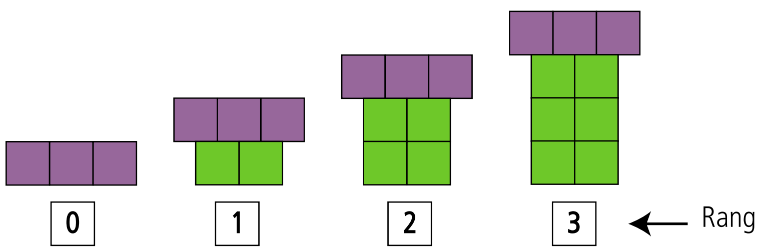
Par exemple, dans la suite non numérique à motif répété ci-dessous, le motif est composé de deux carreaux verts et d'un carreau violet, et il se répète quatre fois (fig. 8). Être capable de reconnaître cette régularité permet aux élèves de prédire avec exactitude les prochains termes de la suite.

Figure 8 *Suite non numérique à motif répété*

> La compréhension de la relation entre le nombre de carreaux (variable dépendante) et le numéro de la figure (variable indépendante) permet aux élèves de prédire le nombre de carreaux nécessaires pour n'importe laquelle des figures de la suite.

Les suites non numériques à motif croissant permettent aux élèves de découvrir des généralisations *entre* deux ensembles de nombres. Elles favorisent le développement de la pensée multiplicative et permettent aux élèves de prédire avec exactitude les valeurs de n'importe lequel des termes de la suite.

Figure 9 *Suite non numérique à motif croissant*



Dans le cas d'une suite non numérique à motif croissant, semblable à celle illustrée ci-dessus, les élèves peuvent initialement porter leur attention sur le fait que le nombre de carreaux verts augmente de deux à chaque répétition du motif et peuvent l'exprimer sous la forme suivante « ajouter 2 carreaux verts chaque fois ». Ce type de pensée récursive met en évidence les changements *à l'intérieur* d'un ensemble de nombres, celui des carreaux, mais non pas la relation entre les deux ensembles de nombres – soit le rang et le nombre de carreaux à chaque position. Ce type de raisonnement comporte certaines limites particulièrement lorsqu'on demande à l'élève de prédire le nombre de carreaux de la 100^{e} figure. Si l'on observe la régularité, « commencer avec 3 carreaux et ajouter 2 carreaux au terme précédent », il est difficile de trouver une règle générale qui permet de prédire le nombre de carreaux pour *quelconque* des termes de la suite. La pensée fonctionnelle met l'accent sur la relation entre le rang et le nombre de carreaux pour chaque figure. Lorsque les nombres d'un ensemble changent, ceux de l'autre ensemble changent aussi de façon prévisible; les nombres de ces deux ensembles sont covariants.

Lorsque des élèves créent des suites non numériques à l'aide de matériel concret et réfléchissent aux régularités observées, ils reconnaissent plus facilement cette relation fonctionnelle. Dans la création de la suite non numérique ci-dessus, les élèves peuvent remarquer qu'ils ont ajouté 2 carreaux verts chaque fois et que les 3 carreaux violets restent dans une rangée. En représentant les suites de manière visuelle, les élèves peuvent identifier quelles sont les quantités qui varient (le rang et les nombres de carreaux verts) et celles qui restent constantes (les carreaux violets), ainsi que la relation fonctionnelle. Cette relation fonctionnelle peut être décrite de la façon suivante :

Multiplier le numéro de la figure par 2 (les carreaux verts) et ajouter 3 (le nombre de carreaux violets),

ou

Nombre de carreaux = Numéro de la figure $\times$ 2 + 3.

Les élèves peuvent aussi décrire la règle en s'appuyant sur leur représentation visuelle, c'est-à-dire comment le + 3 représente le nombre de carreaux violets qui reste inchangé et le $\times$ 2 correspond aux carreaux verts dont le nombre augmente de deux à chaque position consécutive. Les élèves peuvent ensuite généraliser cette compréhension à d'autres relations, par exemple à des relations quadratiques et exponentielles, et établir des liens significatifs entre différentes représentations.

En quoi cela est-il important?

L'exploration de suites non numériques peut constituer un moyen d'aborder des quantités mathématiques qui va au-delà de la « bonne » ou de la « mauvaise » réponse. Les suites non numériques peuvent donner lieu à des stratégies de solutions multiples de la part des élèves, leur permettre de réfléchir à la structure mathématique et les inciter à proposer des conjectures et à justifier leur pensée.

Utilisation des opérations inverses

La soustraction est l'opération inverse de l'addition et vice versa. La division est l'opération inverse de la multiplication et vice versa. Si l'on pense algébriquement à une relation entre deux nombres, nous voyons que le premier nombre va se transformer pour devenir un autre nombre. Par exemple, si nous pensons à 2 + 5 = 7 comme l'union de deux parties (2 et 5) pour faire un tout (7), nous pouvons aussi penser que l'ajout de 5 transformera 2 en 7. L'opération inverse, la soustraction de 5 à 7, nous fait revenir à notre nombre original (2).

Nous pouvons illustrer la relation des opérations inverses au moyen d'une table non ordonnée de valeurs (Warren et Cooper, 2008) (fig. 10). Lorsque les nombres d'entrée et l'opération arithmétique à effectuer sont donnés, les élèves utilisent l'addition pour trouver les valeurs de sortie (modifiées).

Figure 10 *Table de valeurs non ordonnée utilisant l'addition*

Entrée	Opération arithmétique	Sortie
4	**Ajouter 5**	9
2		
10		

On remarquera dans le premier exemple que les calculs suivent l'ordre des opérations. Dans le deuxième exemple, les opérations s'effectuent en ordre inverse.

Si les valeurs de sortie et l'opération arithmétique sont données, les élèves utilisent l'opération inverse (soustraction) pour trouver les valeurs d'entrée (originales) (fig. 11).

Figure 11 *Table de valeurs non ordonnée utilisant la soustraction*

Entrée	**Opération arithmétique**	**Sortie**
4	**Ajouter 5**	9
		7
		10
		15

Pour de plus amples renseignements sur la table de valeurs non ordonnée, se reporter à la section intitulée Table de valeurs à la page 19.

Il en va de même de la multiplication et de la division.

Dans le cas des règles composées de 2 opérations arithmétiques, telles que *entrée* $\times$ 2 + 3 (le nombre d'entrée est multiplié par 2 puis on lui ajoute 3), les élèves apprennent à utiliser les opérations inverses pour trouver la valeur originale ou l'entrée (fig. 12 et 13).

Qu'est-ce qu'une règle composée?

Une règle composée est une expression mathématique à deux opérations ; p. ex., une règle pour une suite non numérique à motif croissant peut avoir deux parties : une responsable de la croissance du motif et une responsable de ce qui reste inchangé.

(Beatty et Bruce, 2012, p. 190, traduction libre)

Figure 12 *Représentation d'un raisonnement lorsque l'entrée est donnée*

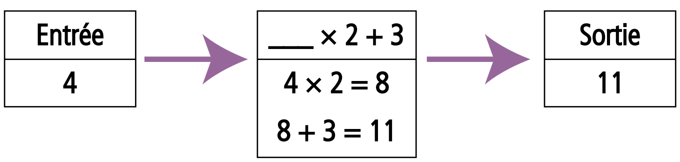
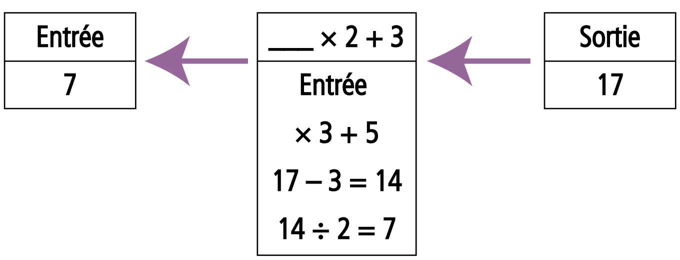


Figure 13 *Représentation d'un raisonnement lorsque la sortie est donnée*



En quoi cela est-il important?

Lors de la résolution de problèmes dans lesquels des quantités sont inconnues, la compréhension des opérations inverses aide les élèves à sélectionner et à utiliser des stratégies appropriées. Cette compréhension est difficile à acquérir par nombreux élèves, mais elle facilite l'apprentissage ultérieur des mathématiques. Soit l'exemple suivant :

> David a donné la moitié de ses cartes de hockey à Charlotte. Charlotte a donné à Jean la moitié des cartes de hockey qu'elle a reçues de David. Jean a gardé 10 de ces cartes et a donné les 8 qui restent à Diane. Combien de cartes de hockey David a-t-il données à Charlotte?

Les élèves peuvent d'abord établir des liens entre les mots et les opérations mathématiques :

David a donné la moitié de ses cartes à Charlotte	$\div 2$
Charlotte a donné la moitié de ses cartes à Jean	$\div 2$
Jean en a gardé 10 et a donné les 8 qui restent à Diane	$-10-8$

Les élèves peuvent alors travailler à rebours :

$8 + 10 = 18$

$18 \times 2 = 36$

David a donné 36 cartes à Charlotte.

Pratiques propices au développement du raisonnement algébrique

Les processus mathématiques tels que décrits dans le curriculum jouent un rôle important dans le développement du raisonnement algébrique et dans l'apprentissage des mathématiques. Dans cette section, nous examinons des pratiques qui sont étroitement liées et font partie intégrante de ces processus :

- Proposer et vérifier des conjectures
- Justifier
- Prédire

Qu'est-ce qu'une conjecture?

Une conjecture est l'expression d'une idée perçue comme étant vraie dans toute situation semblable.

(Ministère de l'Éducation, 2008, p. 10 et 2012, p. 12)

Proposer et vérifier des conjectures

L'étude des relations algébriques favorise le développement des habiletés supérieures de la pensée. Un des aspects les plus importants du développement de la pensée algébrique est d'aider les élèves à formuler et vérifier des conjectures sur les propriétés de nombres et des opérations. Il est important de noter les conjectures des élèves et de leur demander de les améliorer. En effet, les conjectures de ces élèves peuvent être à leur tout début et elles peuvent être incorrectes ou imprécises. Par exemple, une classe travaillant avec des exemples tels que $12 - 12 = 0$ et $45 - 45 = 0$ a eu, au début, l'idée que « si le premier nombre est le même que le deuxième, la réponse sera toujours zéro ». Cette conjecture a été améliorée par la suite de la façon suivante : « si vous soustrayez un nombre à un nombre identique, vous obtenez zéro ».

Justifier

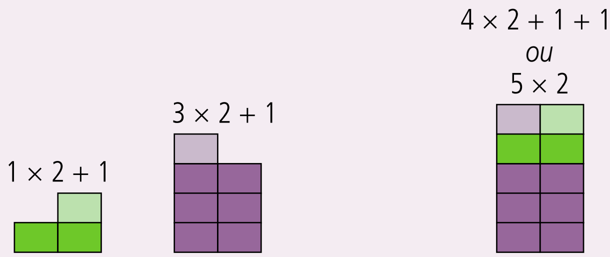
La justification des conjectures est tout aussi importante que leur formulation. De bonnes questions que les élèves doivent se poser sont : « Est-ce toujours vrai? Comment pouvons-nous le savoir? » Les élèves comprennent rapidement qu'un contre-exemple – pour lequel leur idée ne fonctionne pas – rend une conjecture fausse. Ils arrivent aussi à comprendre que de nombreux exemples pour lesquels leurs conjectures fonctionnent sont nécessaires afin de la prouver. Éventuellement, les élèves peuvent raffiner leur pensée et formuler des généralisations, telles que celles présentées ci-dessous pour l'addition de nombres pairs et impairs.

Figure 14 *Exemple de la justification d'une conjecture proposée par un élève*

« Un nombre pair peut toujours être divisé en deux groupes égaux. Donc, les nombres pairs peuvent toujours être considérés comme un nombre multiplié par 2 et avoir la forme $2n$. Un nombre impair aura toujours un 1 en plus dans l'un des deux groupes.

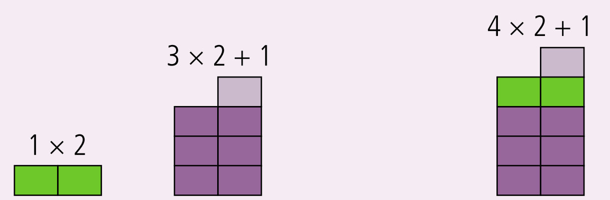
Donc, chaque nombre impair peut être considéré comme étant un nombre multiplié par 2 avec 1 de plus, soit $2n + 1$. Si vous ajoutez des nombres pairs, vous obtenez deux groupes pairs. Il s'avère que la combinaison de deux nombres impairs signifie que vous obtiendrez toujours deux groupes pairs. Cela s'explique par le fait que, dans l'addition de deux nombres impairs, vous combinez deux "extras". »

« Nous pouvons envisager la décomposition de 3 + 7 de la façon suivante :



Nous savons que si nous combinons deux nombres pairs (1 × 2) et (3 × 2), nous obtenons un nombre pair. Si nous ajoutons deux extras, soit 1 + 1, c'est-à-dire 2, nous ajoutons un nombre pair à un nombre pair et nous obtenons deux groupes égaux.

Mais si nous ajoutons un nombre impair à un nombre pair, un des groupes aura un "extra", ce qui signifie que nous obtiendrons deux groupes égaux plus 1. »



Les élèves peuvent justifier leur conjecture de diverses façons p.ex., en utilisant du matériel concret, semi-concret et des nombres et des symboles pour expliquer pourquoi la somme de deux nombres impairs donne toujours un nombre pair.

$$\begin{aligned}(2x + 1) + (2y + 1) &= 2x + 2y + 1 + 1 \\ &= 2(x + y) + 2\end{aligned}$$

Prédire

La règle d'une suite est une généralisation qui permet de prédire avec exactitude des valeurs particulières (le nombre de carreaux nécessaires à n'importe quel rang de la suite ou, inversement, de prédire le numéro de la figure pour n'importe quel nombre de carreaux). Les élèves peuvent passer de « qu'est-ce qui vient *ensuite* » à quel est le nombre de carreaux nécessaires pour *n'importe* quel rang de la suite.

Le passage de la généralisation *suivante* à une généralisation *proche*, puis à une généralisation *lointaine* ou *quelconque* constitue une généralisation algébrique. Demander aux élèves de prédire des états inconnus, dans ce cas des numéros de position inconnus, amène à la nécessité d'une généralisation qui caractérise les données.

Types de généralisation

Généralisation proche – nombre de carreaux nécessaires pour le 10e terme

Généralisation lointaine – nombre de carreaux nécessaires pour le 100e terme

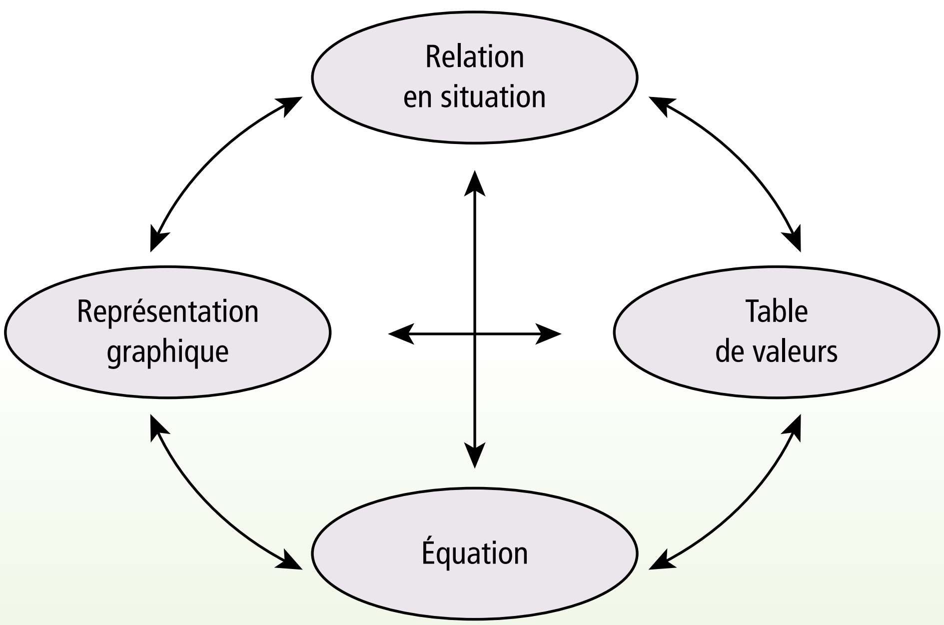
Généralisation explicite – nombre de carreaux nécessaires pour n'importe quelle position

Établissement de liens entre les représentations

> *Les enseignants et les enseignantes doivent amener les élèves à faire un lien entre les raisonnements fondés sur des nombres et ceux fondés sur des dessins. Pour cela, il faut encourager les élèves à discuter des multiples représentations d'une relation. (Rivera et Becker, 2005, p. 203, traduction libre)*

(Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2008, p.41)

Au cycle moyen, les élèves sont amenés à explorer les relations et à les représenter de différentes façons. Une relation peut être représentée par une situation une table de valeurs, une équation ou une représentation graphique. Les flèches dans le schéma ci-après indiquent les liens entre les diverses représentations usuelles d'une relation.



L'étude de ces représentations s'effectue progressivement tout au long des cycles moyen et intermédiaire. Les élèves explorent d'abord les relations à partir de situations exprimées à l'aide de suites non numériques ou de mots. Ensuite, ils représentent les relations par des tables de valeurs, puis par des règles exprimées en mots et avec des équations. Quant aux représentations graphiques d'une relation, elles sont davantage à l'étude au cycle intermédiaire.

Le raisonnement algébrique au moyen de représentations

Représentations concrètes et semi-concrètes

Tous les élèves devraient avoir la possibilité de travailler avec des représentations visuelles durant leur apprentissage. Il est important de travailler initialement avec le matériel concret, afin de pouvoir donner un sens aux représentations semi-concrètes. Examinons la suite non numérique à motif croissant (fig. 15) ci-dessous. Lorsque l'élève est appelé à analyser une situation, à proposer des conjectures, vérifier celles-ci pour éventuellement arriver à formuler une généralisation qui lui permettra de déterminer la règle pour trouver n'importe quelle figure de la suite. En faisant cela, l'élève peut ainsi examiner la relation entre deux ensembles de données, dans ce cas, le numéro de la figure et le nombre de cure-dents à chaque position. En examinant à la fois la configuration et le nombre de cure-dents à chaque position, les élèves peuvent déterminer la partie de la règle qui est responsable de la croissance du motif (× 3) et la partie qui est responsable de ce qui reste inchangé (+ 2).

L'analyse des représentations concrètes et semi-concrètes des suites à motif croissant permet de développer une meilleure compréhension des généralisations.

Figure 15 *Exemple de suite non numérique à motif croissant*

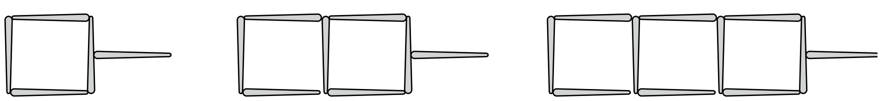


Figure 1 Figure 2 Figure 3

Représentations graphiques

Les représentations graphiques constituent un autre type de représentation visuelle d'une règle algébrique. Le graphique n'est pas uniquement un ensemble de points, mais est aussi un objet mathématique qui représente une règle algébrique ou une équation. Les caractéristiques des graphiques peuvent démontrer si une fonction est affine (linéaire) (fig. 16), ou si elle est du second degré (quadratique) (fig. 17) ou d'une autre nature et donner certains indices quant à l'équation, la pente ou le taux de variation.

Les graphiques permettent aussi de prédire d’autres valeurs soit par extrapolation (estimer une valeur en prolongeant le graphique) ou par interpolation (déterminer ou prédire une valeur sur le graphique).

Figure 16 *Linéaire*

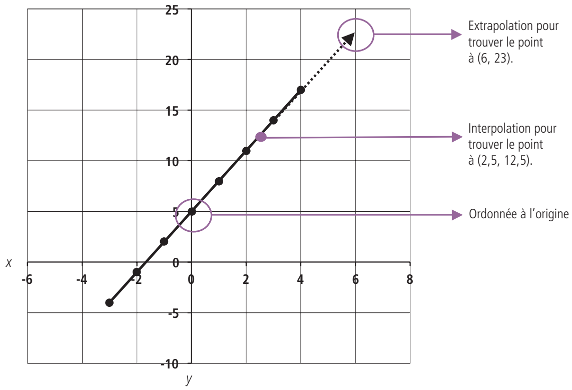


Figure 17 *Quadratique*

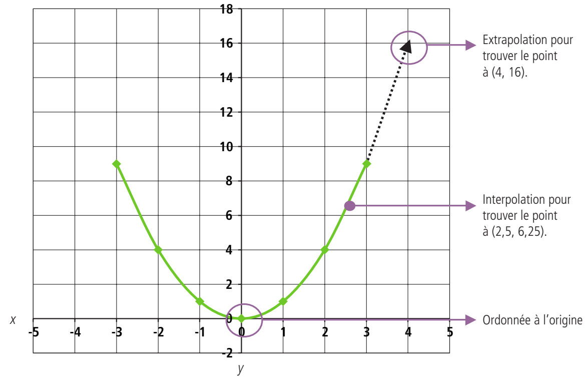


Table de valeurs

Les tables de valeurs sont utiles pour consigner et présenter des informations.

Figure 18 *Table de valeurs non ordonnée*

Entrée (x)	*Sortie* (y)
2	11
5	20
1	8
3	14

Entrée × 3 + 5

Figure 19 *Table de valeurs ordonnée*

Entrée (x)	*Sortie* (y)	
1	8	+ 3
2	11	+ 3
3	14	+ 3
4	17	

Les élèves peuvent utiliser ces tables pour examiner les relations entre deux colonnes de valeurs. Dans le cas d’une table de valeurs non ordonnée, les élèves examinent les nombres des deux colonnes pour déterminer la relation entre les deux ensembles, et développent ainsi leur pensée fonctionnelle. Si l’on présente uniquement des tables de valeurs ordonnées aux élèves, cela peut entraver le développement de la pensée fonctionnelle. La présentation de tables de valeur ordonnées peut entraver le développement de la pensée fonctionnelle (Watson, 2010).

Dans la table de valeurs ordonnée, les élèves peuvent simplement observer la colonne de droite pour déterminer que les valeurs dans cette colonne augmentent de 3 à chaque fois. Ainsi, les élèves apprennent à prendre la première valeur de la colonne *Entrée* (x) et à la multiplier par 3 pour déterminer ce qu’il faut ajouter pour obtenir la première valeur de la colonne *Sortie* (y) ($1 \times 3 + 5 = 8$). Essentiellement, les élèves ne font pas appel à leur raisonnement algébrique, mais utilisent simplement l’arithmétique pour trouver la règle, ce qui les aide peu à comprendre que la règle représente une relation entre les valeurs des deux colonnes.

L'emploi d'une table de valeurs ordonnée peut aider les élèves à déterminer si une relation est linéaire (fig. 20) ou quadratique (fig. 21). Les premières analyses portent sur les différences de valeurs *y* associées aux valeurs *x* consécutives. Si les différences sont constantes, cela signifie que la relation est linéaire. Si les différences ne sont pas constantes, les élèves devraient porter leur attention sur l'écart entre celles-ci. Si ces écarts sont constants, la relation est quadratique.

Figure 20 ***Linéaire***

Entrée (x)	*Sortie* (y)
0	5
1	8
2	11
3	14
4	17

+ 3
+ 3
+ 3
+ 3

Figure 21 ***Quadratique***

Entrée (x)	*Sortie* (y)
0	0
1	1
2	4
3	9
4	16

Premières différences

+ 1
+ 3
+ 5
+ 7

Deuxièmes différences

+ 2
+ 2
+ 2

Résolution de problèmes présentés en contexte

Dans le développement de la pensée algébrique, les élèves obtiennent initialement de meilleurs résultats lorsque les problèmes sont présentés en contexte (avec des mots) plutôt qu'avec les équations symboliques correspondantes (Koedinger, Alibali, et Nathan, 2008). Les problèmes présentés à l'écrit ou à l'oral permettent aux élèves de raisonner quantitativement en faisant appel à leurs connaissances antérieures, sans avoir à mémoriser comment ils doivent manipuler les symboles.

Les élèves ont répondu correctement à cette question :

> Ziggy est un serveur. Dans une journée il a travaillé 5 heures et a reçu 66 $ en pourboires. S'il a gagné 111,90 $ durant cette journée, quel est son salaire horaire?

mais ont eu du mal à résoudre l'équation suivante :

> $5x + 66 = 111{,}90$

En travaillant à résoudre des problèmes en contexte et en en discutant avec leurs pairs, les élèves ont acquis une compréhension des relations entre les contextes du monde réel et leurs représentations symboliques. Cette connaissance apporte une signification à la fois aux symboles et aux procédures de résolution des équations.

Représentation symbolique

Les élèves utilisent des représentations et des méthodes formelles durant des expériences d'apprentissage soigneusement planifiées. Celles-ci sont conçues pour créer des liens entre leur conception antérieure de l'algèbre et un enseignement plus formel. Mettre l'accent sur les différentes représentations du raisonnement algébrique avant et durant le secondaire permet de s'assurer que l'introduction des symboles et des règles pour la résolution d'équations sera comprise. Les élèves à qui l'on a appris à s'en rapporter uniquement aux représentations symboliques et qui n'ont pas eu la possibilité d'étudier d’autres représentations risquent de ne pas comprendre totalement le raisonnement algébrique. Bien que les élèves à qui l’on a appris comment utiliser des symboles et des règles soient capables de produire des solutions correctes, il est généralement accepté que l’apprentissage de n’importe quelle procédure mathématique doit être lié à une connaissance conceptuelle pour favoriser l’acquisition d’une compréhension profonde (Hiebert et Carpenter, 1992).

Le raisonnement algébrique à travers les domaines et les années d’études

Le raisonnement algébrique peut être favorisé grâce à des activités qui encouragent les élèves à aller au-delà du raisonnement numérique pour adopter un raisonnement plus général à propos des relations et des quantités.

Voici l’exemple d’une question, liée à des mesures, qui pourrait être posée aux élèves de la maternelle à la 12^{e} année.

> Vous voulez aménager un jardin rectangulaire. Quels sont les jardins possibles dont le périmètre est de 24 mètres? Notez vos résultats afin que quelqu’un puisse se faire une idée de votre mode de pensée.
>
> 1. Quelles sont les différentes formes rectangulaires du jardin que vous avez créé?
> 2. Comment avez-vous noté vos résultats?
> 3. Comment la surface du jardin change-t-elle si un côté devient plus long ou plus court?
> 4. Avez-vous trouvé toutes les possibilités? Comment pouvez-vous en être sûr?

Grâce au processus de création et d’analyse de divers rectangles, les élèves peuvent généraliser et découvrir les relations entre les dimensions, le périmètre et la surface.

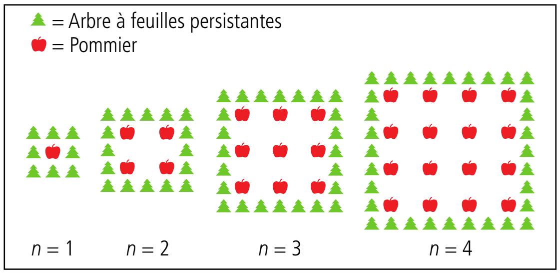
Comment pouvons-nous favoriser le raisonnement algébrique?

> *L’algèbre est le langage de communication privilégié des mathématiques. Les élèves doivent apprendre à utiliser l’algèbre comme outil de résolution de problèmes, c’est-à-dire comme un moyen de clarifier les concepts à un niveau abstrait avant de les appliquer. Le fait de connaître ce processus aide souvent les élèves à faire des généralisations et à approfondir leur apprentissage au-delà du contexte original.*
>
> (Ministère de l’Éducation de l’Ontario, 2005, p. 10)

Nous pouvons favoriser le raisonnement algébrique en créant une culture mathématique qui valorise l’établissement de conjectures, leur justification, la prédiction et le raisonnement en résolution de problèmes. Lorsque des enseignantes et enseignants planifient les questions à poser, ils devraient considérer comment les élèves pourront résoudre les problèmes afin d’optimiser le développement de leur raisonnement algébrique. Les exemples suivants montrent comment un changement simple dans une tâche peut faire passer du mode de la pensée arithmétique à celui de la pensée algébrique.

Dans les questions suivantes, il est demandé aux élèves de donner la valeur d'un terme, mais pas nécessairement de penser algébriquement.

> J'ai remarqué quelque chose d'intéressant au sujet de mes voisins qui ont un verger. Ils plantent leurs pommiers en formant des carrés dans chaque verger. Pour protéger les arbres contre le vent, ils plantent des arbres à feuilles persistantes autour de leur verger.
>
> Le diagramme de droite illustre la suite des pommiers et des arbres à feuilles persistantes pour un nombre (n) de rangées de pommiers.
>
> Combien y aura-t-il d'arbres de chaque type si $n = 6$?



Adapté du Programme international pour le suivi des acquis des élèves (PISA)

Un élève peut répondre de la façon suivante :

> J'ai fait un dessin pour la position 5 et la position 6, puis j'ai compté le nombre d'arbres à feuilles persistantes et le nombre de pommiers. Il y avait 48 arbres à feuilles persistantes et 36 pommiers à la position 6.

De légères modifications à cette question, telles que présentées à la section suivante, permettront aux élèves de développer et d'affiner leurs aptitudes en matière de raisonnement algébrique en généralisant les relations. On obtient ce résultat en approfondissant un élément de la tâche – par exemple, en demandant aux élèves d'identifier la relation qui permet de prédire avec exactitude le nombre d'arbres pour un nombre quelconque de rangées.

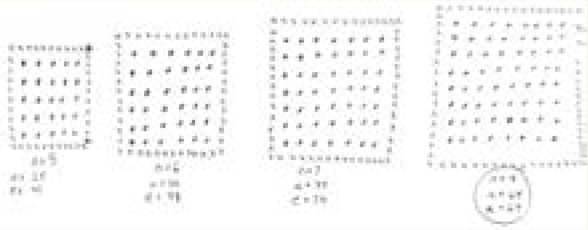
Être attentif au raisonnement des élèves

> Lorsque des enseignantes et des enseignants examinent et annotent les travaux des élèves avec un collègue ou dans un petit groupe, ils peuvent analyser le mode de pensée des élèves, c'est-à-dire leur compréhension, stratégies et conceptions transitionnelles. Il s'agit là d'une stratégie efficace d'apprentissage professionnel, qui pourrait être mise en œuvre dans une enquête collaborative à travers une école ou un ensemble d'écoles, consistant à comparer les solutions d'élèves de diverses années.

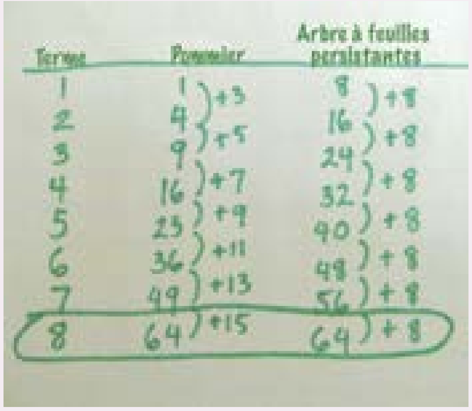
Pour encourager le raisonnement algébrique, nous avons modifié la question du problème du verger de la façon suivante :

1. Quand le nombre de pommiers est-il égal au nombre d'arbres à feuilles persistantes? Justifiez votre réponse.
2. Comment l'augmentation du nombre de pommiers se compare-t-elle à l'augmentation du nombre d'arbres à feuilles persistantes?

Benoit a créé les termes suivants sous forme de diagrammes. Après avoir dessiné le diagramme du 8e terme et compté le nombre d'arbres à feuilles persistantes et le nombre de pommiers, il s'est rendu compte que ces nombres étaient devenus égaux. Benoit n'était pas sûr de savoir comment répondre à la question 2.



Pour répondre à la question 1, Kareem a rempli une table de valeurs ce qui lui a permis de s'apercevoir que le nombre de pommiers augmente d'un nombre égal à l'augmentation précédente plus deux. Par exemple, entre le terme 1 et le terme 2, la différence entre les nombres de pommiers est 3. Entre le terme 2 et le terme 3, la différence entre les nombres de pommiers est 5, et entre le terme 3 et le terme 4, elle est égale à 7. Suivant cette suite, il a ajouté 9 à 16 pour obtenir le nombre de pommiers du terme 5. Pour les arbres à feuilles persistantes, Kareem a remarqué que le nombre d'arbres augmentait de 8 à chaque fois. Pour répondre à la question 2, Kareem a remarqué que le nombre d'arbres à feuilles persistantes changeait toujours de 8, mais que le changement dans le nombre de pommiers augmentait (3, 5, 7, 9, 11…), ce qui signifie que le nombre de pommiers augmente plus rapidement après les quelques premiers termes.

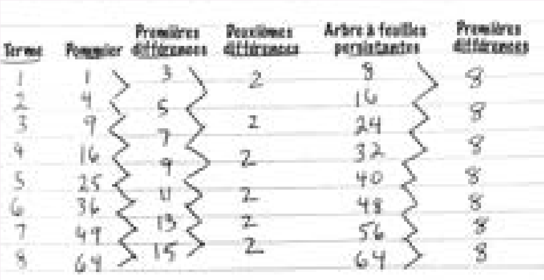


Terme	Pommier		Arbre à feuilles persistantes	
1	1	+3	8	+8
2	4	+5	16	+8
3	9	+7	24	+8
4	16	+9	32	+8
5	25	+11	40	+8
6	36	+13	48	+8
7	49	+15	56	+8
8	64		64	

Jayda a rempli la table de valeurs selon les principes de la pensée fonctionnelle et a remarqué que le nombre de pommiers était égal au numéro du terme multiplié par lui-même (c. à d. mis au carré). Elle a aussi remarqué que le nombre d'arbres à feuilles persistantes est égal au numéro du terme multiplié par 8. Donc, pour le terme 8, le nombre de pommiers est égal au numéro du terme au carré, soit 82 et le nombre d'arbres à feuilles persistantes est égal au numéro du terme 8 × 8.

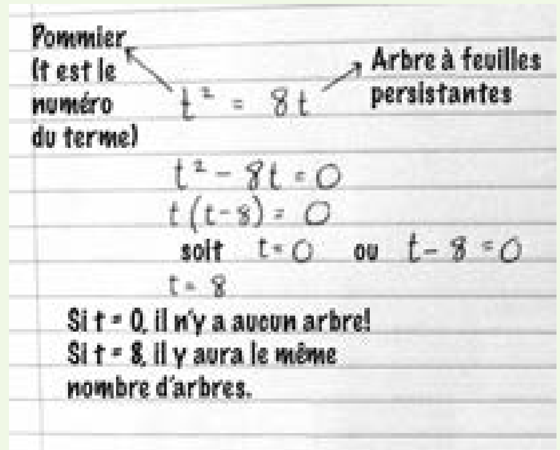
Terme	Pommier	Arbre à feuilles persistantes
1	1	8
2	4	16
3	9	24
4	16	32
5	25	40
6	36	48
7	49	56
8	64	64

Pour répondre à la question 2, Jayda a créé une autre table de valeurs afin d'examiner les premières et deuxièmes différences, et elle a constaté que le nombre d'arbres à feuilles persistantes changeait linéairement, mais que le nombre de pommiers changeait de façon quadratique. Elle a alors été capable de déterminer que les relations quadratiques changeaient à un rythme plus rapide pour les termes suivants de la régularité que les relations linéaires.

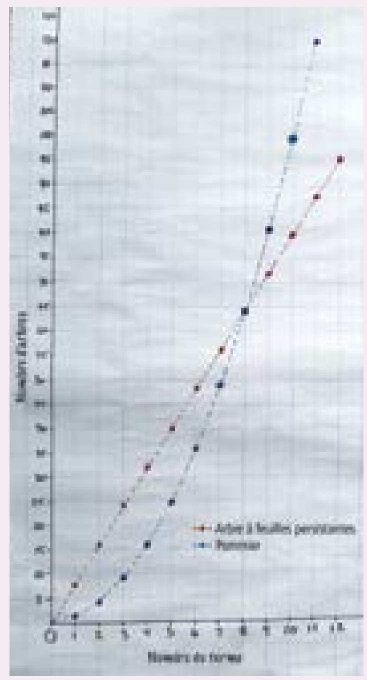


Terme	Pommier	Premières différences	Deuxièmes différences	Arbre à feuilles persistantes	Premières différences
1	1	3	2	8	8
2	4	5	2	16	8
3	9	7	2	24	8
4	16	9	2	32	8
5	25	11	2	40	8
6	36	13	2	48	8
7	49	15		56	8
8	64			64	

Chas a écrit deux équations algébriques : $a = t^2$ (où *a* est le nombre de pommiers et t est le numéro du terme) et $e = 8t$ (où *e* est le nombre d'arbres à feuilles persistantes et *t* est le numéro du terme). Ces équations représentent les deux régularités. Il les a ensuite représentées sous la forme d'une relation d'égalité (c.-à-d. situation dans laquelle le nombre de pommiers est égal au nombre d'arbres à feuilles persistantes) et a résolu l'équation. Pour répondre à la question 2, Chas a déterminé que la multiplication d'un nombre par une valeur constante, telle que 8, ne provoquait pas un changement aussi grand que la multiplication d'un nombre par lui-même (c.-à-d. sa mise au carré) dans le cas des nombres plus grands.



Lexie a tracé un graphique dans un diagramme. Elle s'est aperçue que les lignes de chaque régularité se coupaient au 8^e terme et a conclu que c'était le numéro du terme pour lequel le nombre d'arbres à feuilles persistantes était égal au nombre de pommiers. Lorsqu'elle a examiné son graphique, Lexie a noté que le changement dans le nombre d'arbres à feuilles persistantes (points rouges) était constant (à cause de la nature linéaire du graphique) tandis que le changement dans le nombre de pommiers (points bleus) augmentait à chaque terme (puisque ce graphique est de nature quadratique). Elle a ensuite comparé la variation du nombre d'arbres à feuilles persistantes à celle du nombre de pommiers avant et après le point d'intersection. Elle a remarqué que le nombre d'arbres à feuilles persistantes augmentait plus rapidement que le nombre de pommiers jusqu'au 8^e terme. Ensuite, l'augmentation du nombre de pommiers devient plus rapide.



Bibliographie et ressources du ministère de l'Éducation

Bibliographie

BEATTY, R. et C. BRUCE. *From patterns to algebra: Lessons for exploring linear relationships*, Toronto, ON: Nelson Education, 2012.

CARPENTER, T.P., M. FRANKE, et L. Levi. *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*, Portsmouth, NH: Heinemann, 2003.

GREENES, C., M. CAVANAGH, L. DACEY, C. FINDELL et M. SMALL. *Navigating through algebra in Prekindergarten–Grade 2*, Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2001.

HIEBERT, J. et T. P. CARPENTER. « Learning and teaching with understanding », cité dans D. A.GROUWS (édit.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, New York, NY: Macmillan, 1992, p. 65-97.

KAPUT, J. et M. BLANTON. « Algebrafying the elementary mathematics experience in a teacher-centered, systemic way », cité dans T. ROMBERG et T. CARPENTER (édit.), *Understanding mathematics and science matters*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, 2005, p. 99-125.

KIERAN, C. « The learning and teaching of school algebra », cité dans D. A. GROUWS (édit.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*, New York, NY: Macmillan, 1992, p. 390-419.

KOEDINGER, K.R., M. W. ALIBALI et M. J. NATHAN. « Trade-offs between grounded and abstract representations: Evidence from algebra problem solving », *Cognitive Science*, vol. 32, 2008, p. 366-397.

MASON, J. « Expressing generality and roots of algebra », cité dans N. BEDNARZ, C. KIERAN et L. LEE (édit.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*, Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1996, p. 65-86.

ONTARIO. Ministère de l'Éducation. *Le curriculum de l'Ontario de la 1re à la 8e année Mathématiques*, Toronto, ON : Imprimeur de la Reine pour l'Ontario, 2005.

ONTARIO. Ministère de l'Éducation. *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la 4e à la 6e année*, Modélisation et algèbre, Toronto, ON : Imprimeur de la Reine pour l'Ontario, 2008.

ONTARIO. Ministère de l'Éducation. *MathGAINS 2009–2010 professional learning series for coaches: Big ideas in patterning and algebra*, [En ligne], 2009. [http://www.edugains.ca/newsite/math2/20092010proflearningseries.html]

ONTARIO. Ministère de l'Éducation. *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la 7e à la 9e année*, Fascicule 2 : Algèbre (Version provisoire pour mise à l'essai), Toronto : ON : Imprimeur de la Reine pour l'Ontario, 2012.

ONTARIO. Ministère de l'Éducation. *Student critical learning instructional paths supports (CLIPS) in mathematics: Grades K–12*, [En ligne], 2013. [http://www.mathclips.ca]

SWAFFORD, J.O. et C. W. LANGRALL. « Grade 6 students' preinstructional use of equation to describe and represent problem situations », *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 31, 2000, p. 89-112.

VAN DE WALLE, J. A., K. KARP et J. BAY-WILLIAMS. *Elementary and middle school mathematics: Teaching developmentally*, Boston, MA: Allyn & Bacon, 2011.

WARREN, E. et T. J. COOPER. « Generalizing the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking », *Educational Studies in Mathematics*, vol. 67, 2008, p. 171–185.

WATSON, A. « Key understandings in school mathematics: 2 », *Mathematics Teaching*, vol. 219, 2010, p. 12–14.

Ressources du ministère de l'Éducation

Continuum & Connections: Patterning to Algebra K–3

Série de leçons constituant un exemple de parcours d'apprentissage, conçues pour promouvoir les premières phases du raisonnement algébrique.

http://www.edugains.ca/resources/LearningMaterials/ContinuumConnection/PatterningtoAlgebraLessons_K-3.pdf

Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la maternelle à la 3e année, Modélisation et algèbre, Fascicule 1, Régularités et relations

http://www.atelier.on.ca/edu/core.cfm?L=2

Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la 4e à la 6e année, Modélisation et algèbre

http://www.atelier.on.ca/edu/core.cfm?L=2

Targeted Implementation and Planning Supports for Revised Mathematics TIPS4RM Grades 7–12

Aides et plans de leçons en trois parties pour la 8e année à la 12e année, élaborés ou financés par le ministère de l'Éducation de l'Ontario. Cours complets pour la 7e et la 8e année, et cours appliqués complets pour la 9e et la 10e année. Pour les autres années, des unités sélectionnées et des plans de cours complets ont été élaborés. Évaluations sommatives pour beaucoup d'années.

http://www.edugains.ca/newsite/math2/tips4rm.html

Gap Closing Materials Intermediate/Senior

Matériels d'intervention conçus pour les élèves ayant besoin d'aide en mathématiques. Le but est de jeter des ponts entre le sens des nombres, les mesures et l'algèbre, afin que les élèves réussissent dans leur programme de mathématiques. Accompagnés de guides d'animation.

http://www.edugains.ca/newsite/math2/gapclosingintermediatesenior.html

- ePractice. Propose aux élèves des activités interactives pratiques supplémentaires. http://www.epractice.ca

Critical Learning Instructional Paths Supports (CLIPS)

Activités interactives avec rétroaction immédiate.

- Patterning and algebra: exploring algebraic relationships. www.mathclips.ca

Pour obtenir des exemplaires supplémentaires, communiquez avec ServiceOntario au 416 326-5300 ou au 1 800 668-9938 ou rendez-vous au http://www.publications.serviceontario.ca/ecom

Imprimé sur du papier recyclé
ISBN 978-1-4606-2489-0 Imprimé
ISBN 978-1-4606-2490-6 PDF
© Imprimeur de la Reine pour l'Ontario, 2013