Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la 7e à la 10e année

Fascicule 3

Mesure et géométrie

2019

Éditions cforp

Photos et illustrations : © iStock.com, © stock.adobe.com, Slash Photography

Le ministère de l'Éducation de l'Ontario a fourni une aide financière pour la réalisation de ce projet. Cet apport financier ne doit pas pour autant être perçu comme une approbation ministérielle pour l'utilisation du matériel produit. Cette publication n'engage que l'opinion de ses auteures et auteurs, laquelle ne représente pas nécessairement celle du Ministère.

435, rue Donald, Ottawa (Ontario) K1K 4X5
Commandes : Tél. : 613 747-1553
Tél. sans frais (Canada) : 1 877 747-8003
Téléc. : 613 747-0866
Téléc. sans frais (Canada) : 1 877 747-8004
Site Web : cforp.ca/catalogue
Courriel : commandes@cforp.ca

PDF : ISBN 978-2-7657-0652-6
Dépôt légal – deuxième trimestre 2019

Bibliothèque et Archives Canada

TABLE DES MATIÈRES

Table des matières

PRÉFACE

Le ministère de l'Éducation de l'Ontario a publié, en 2006, une série de guides pédagogiques, composée d'un guide principal en cinq fascicules et de guides d'accompagnement pour chacun des domaines d'étude, appuyant la mise en œuvre des recommandations présentées dans les rapports de tables rondes d'experts en mathématiques. Le Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la maternelle à la 6e année a connu un énorme succès à l'élémentaire. En effet, il comble un grand besoin du personnel enseignant, relatif aux ressources d'appui en mathématiques. Il propose notamment des stratégies axées sur la mise en œuvre d'un programme de mathématiques efficace. De plus, il favorise la création d'une communauté d'apprenantes et d'apprenants en vue de développer et de valoriser le raisonnement mathématique.

Depuis la publication de cette série de guides pédagogiques, il y a eu une demande croissante pour une version similaire présentant les diverses composantes de l'enseignement efficace des mathématiques, de la 7e à la 10e année. Cette demande s'explique par le besoin qu'a le personnel enseignant de mieux comprendre ce que préconisent les plus récentes recherches quant à l'enseignement, à l'apprentissage et à l'évaluation des mathématiques au cycle intermédiaire. Toutes les consultations, menées auprès des parties concernées, ont clairement montré l'urgence et la nécessité de produire, sous forme de fascicules, un guide portant sur des stratégies efficaces relatives à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques, de la 7e à la 10e année.

Le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques, de la 7e à la 10e année* porte principalement sur la résolution de problèmes en tant que contexte d'apprentissage des mathématiques et sur la communication considérée comme un moyen de développement et d'expression du raisonnement mathématique. Il tient compte également des stratégies d'évaluation énoncées dans Faire croître le succès – Évaluation et communication du rendement des élèves fréquentant les écoles de l'Ontario (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010a) et explique le rôle que joue l'apprentissage professionnel dans l'amélioration du rendement des élèves en mathématiques, en Ontario. Ce guide comprend trois fascicules. Le premier porte sur les principes de l'enseignement efficace des mathématiques. Il vient enrichir certains principes fondamentaux de la publication Mettre l'accent sur l'enseignement des mathématiques M-12 (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2011). Le deuxième est axé sur l'enseignement des concepts algébriques du domaine Modélisation et algèbre, en 7e et en 8e année, des domaines Relations et Numération et algèbre, en 9e année, ainsi que des domaines Fonctions affines et Fonctions du second degré, en 10e année. Le troisième et dernier fascicule traite de l'enseignement des concepts de mesure et de géométrie des deux domaines en 7e et en 8e année, soit Géométrie et sens de l'espace et Mesure. Ces concepts sont également explorés dans le domaine Mesure et géométrie du curriculum de mathématiques de 9e année, dans le domaine Géométrie analytique pour les cours de type théorique, en 9e et en 10e année, ainsi que dans le domaine Trigonométrie, en 10e année.

Tous les fascicules sont conçus en vue d'aider l'enseignante ou l'enseignant à s'approprier les concepts pédagogiques propres à chaque domaine. Il importe de souligner que le contenu de chacun des fascicules tient compte des recherches actuelles sur l'apprentissage des mathématiques. Des situations d'apprentissage misant sur la résolution de problèmes suscitant le questionnement et la réflexion sont présentées dans les deux autres fascicules portant sur l'algèbre et la géométrie. Elles mettent en contexte les propos théoriques développés.

Ces documents d'appui aux programmes-cadres de mathématiques ont été élaborés en conformité avec les principales initiatives ministérielles pour soutenir la réussite scolaire de toutes et de tous les élèves et appuyer le développement durable de la communauté scolaire de langue française de l'Ontario. Ils mettent l'accent, entre autres, sur des stratégies d'enseignement qui favorisent l'acquisition de compétences en communication orale.

INTRODUCTION

> La géométrie nous aide à représenter et à décrire, de façon ordonnée, les objets qui nous entourent et leurs relations spatiales. En outre, l'acquisition d'un sens approfondi des relations spatiales et une maîtrise des concepts et du langage de la géométrie permettent aux élèves d'améliorer leur compréhension des concepts liés à la mesure et à la numération (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005a, p. 9).
>
> L'étude des concepts et des habiletés liés à la mesure présente des applications directes au monde dans lequel les élèves évoluent. […] Au fur et à mesure que les élèves renforcent leurs habiletés en numération, ils devraient pouvoir résoudre des problèmes de mesure de plus en plus complexes, ce qui renforce leurs connaissances en algèbre comme en géométrie (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005a, p. 9).

Selon Mettre l'accent sur le raisonnement spatial M-12 :

> Le curriculum de l'Ontario combine la géométrie et le sens de l'espace dans un même domaine (comme d'ailleurs plusieurs autres curriculums à travers le monde), car la géométrie et le sens de l'espace sont étroitement liés. Le mot *géométrie* signifie en gros « mesure de la Terre » et concerne directement la mesure et le déplacement d'objets dans l'espace. La géométrie est le fondement des mathématiques telles que nous les connaissons aujourd'hui; elle a été développée pour expliquer des phénomènes et résoudre des problèmes directement liés à la vie de tous les jours, par exemple la mesure du temps et la navigation en mer. La pensée spatiale a donné naissance aux plus anciennes formes de pensée mathématique sophistiquée (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2014, p. 3).

L'étude de la géométrie et de la mesure évolue tout le long des années d'études. De la 1re à la 8e année, les domaines Géométrie et sens de l'espace et Mesure sont considérés comme deux domaines distincts. Cela permet aux élèves de développer les habiletés et les concepts inhérents à chaque domaine d'étude et de les approfondir. Cependant, l'enseignement des mathématiques à ces années d'études doit favoriser la création de liens étroits entre les apprentissages essentiels liés à ces deux domaines (p. ex., déterminer les attributs mesurables de quadrilatères ou de prismes). Ce qui distingue le curriculum de mathématiques de 9e année de celui de la 1re à la 8e année, c'est l'intégration des deux domaines d'étude Géométrie et sens de l'espace et Mesure en un seul, soit Mesure et géométrie. Ce domaine :

> […] poursuit l'étude abordée en 8e année des relations qui existent entre diverses figures et entre divers solides. Il vise à développer les grandes idées rattachées aux formules dans le but de mieux comprendre les liens qui existent entre ces dernières et les appliquer dans divers problèmes incluant le calcul de l'aire maximale selon différentes données (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005b, p. 9).

Par ailleurs, le domaine Géométrie analytique du cours théorique de 9e année vise l'étude du concept de la droite (p. ex., droites parallèles ou perpendiculaires, propriétés géométriques définissant une figure quelconque) au moyen de calculs algébriques, de systèmes de coordonnées et de représentations graphiques.

À partir de la 10e année, le domaine Mesure et géométrie n'existe plus en tant que tel. Les domaines préconisés sont Géométrie analytique et Trigonométrie. Ces domaines permettent aux élèves d'explorer des situations les invitant à se servir de leur raisonnement proportionnel et de leur raisonnement spatial pour identifier des triangles semblables, découvrir les relations entre les mesures des angles et celles des côtés de triangles rectangles et acutangles (10e année théorique), et résoudre des problèmes à l'aide de rapports trigonométriques ainsi que de la loi des sinus et de la loi du cosinus. Le domaine Géométrie analytique permet aux élèves de résoudre des problèmes portant sur l'intersection de droites, de vérifier et de démontrer algébriquement les propriétés géométriques de divers triangles et quadrilatères en ayant recours entre autres au parallélisme, à la perpendicularité, à la distance entre deux points et au point milieu de segments. Tout le long du cours, il faut aider les élèves à développer leur capacité à justifier leur raisonnement et à le préciser, ainsi qu'à rendre leur pensée géométrique plus algébrique.

LE RAISONNEMENT SPATIAL

> Le raisonnement spatial ou l'intelligence spatiale est la capacité d'imaginer, [de] visualiser et [de] différencier des objets en deux ou [en] trois dimensions. Elle contribue au potentiel à comprendre, [à] manipuler et [à] modifier des données complexes et [à] traduire des concepts en idées concrètes (MyRHline, 2017).

Selon le ministère de l'Éducation de l'Ontario (2014), dans le document *Mettre l'accent sur le raisonnement spatial M-12* :

> [i]l est crucial que l'intervention en mathématiques soit précoce […] (Sinclair et Bruce, 2014). Mais nous savons aussi que l'importance de la pensée spatiale augmente durant l'adolescence, à mesure que les élèves étudient un curriculum de plus en plus abstrait les conduisant à des mathématiques de haut niveau, car « l'espace est plus étroitement associé aux mathématiques dans les années d'études supérieures » (Mix et Cheng, 2012, traduction libre, p. 219) (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2014, p. 15).

Il y est également précisé que si les enseignantes et enseignants ne font pas un effort particulier pour identifier des contenus favorisant le développement du raisonnement spatial dans tous les domaines d'étude en mathématiques :

Le document *Mettre l'accent sur le raisonnement spatial M-12* (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2014, p. 15 à 21), contient une section intitulée **Le raisonnement spatial à travers les domaines et les années d'études**.

> […] les concepts, les outils et les processus qui […] sous-tendent [le raisonnement spatial] resteront enfermés dans une zone grise du curriculum de la maternelle à la 12e année, et ne seront pas enseignés explicitement et systématiquement dans quelconque partie du curriculum [(National Research Council, 2006, p. 7, cité dans Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2014, p. 5, traduction libre)].

Voici des exemples de contenus de certains domaines d'étude favorisant le développement du raisonnement spatial, tirés des programmes-cadres de mathématiques de l'Ontario :

MESURE ET GÉOMÉTRIE ET SENS DE L'ESPACE		MESURE ET GÉOMÉTRIE	TRIGONOMÉTRIE
7E ANNÉE	**8E ANNÉE**	**9E ANNÉE**	**10E ANNÉE**
– **établir et décrire** la relation entre la circonférence, le rayon et le diamètre d'un cercle afin de déterminer la valeur de π.	– **établir la relation, à l'aide de développements**, entre l'aire totale de prismes droits et la somme des aires de ses faces. – **estimer** et calculer l'aire de prismes droits.	– **décrire**, au moyen de matériel d'appui ou d'un tableur, l'effet sur le périmètre et sur l'aire d'une figure plane lorsque les dimensions sont doublées, triplées.	– **décrire les propriétés de deux triangles semblables.** – **identifier** des conditions suffisantes pour que deux triangles soient semblables, à l'aide ou non d'un logiciel de géométrie dynamique.
– **estimer**, mesurer et calculer la circonférence de cercles dans divers contextes.	– **découvrir expérimentalement la formule** de calcul de l'aire d'un cercle, à l'aide de matériel concret ou illustré.	– **établir comment déterminer** l'aire de prismes, de pyramides, de cylindres, de cônes et de sphères.	– **modéliser** et résoudre des problèmes en deux et trois dimensions faisant appel à la trigonométrie.
– **établir, à l'aide de matériel concret ou illustré, les relations** entre l'aire du trapèze et l'aire du parallélogramme et entre l'aire du trapèze et l'aire du triangle.	– **établir la relation entre le volume** de prismes droits et le volume du cylindre. – **estimer** et calculer le volume de prismes et de cylindres dans divers contextes.	– **décrire la relation entre le volume** d'un cône et celui d'un cylindre, d'une part, et le volume d'une pyramide et celui d'un prisme droit, d'autre part.	– déterminer, à l'aide ou non d'outils technologiques, **l'effet sur la hauteur et sur l'aire d'un triangle** lorsque la longueur des côtés est multipliée ou divisée par 2, par 3, par 4, etc.

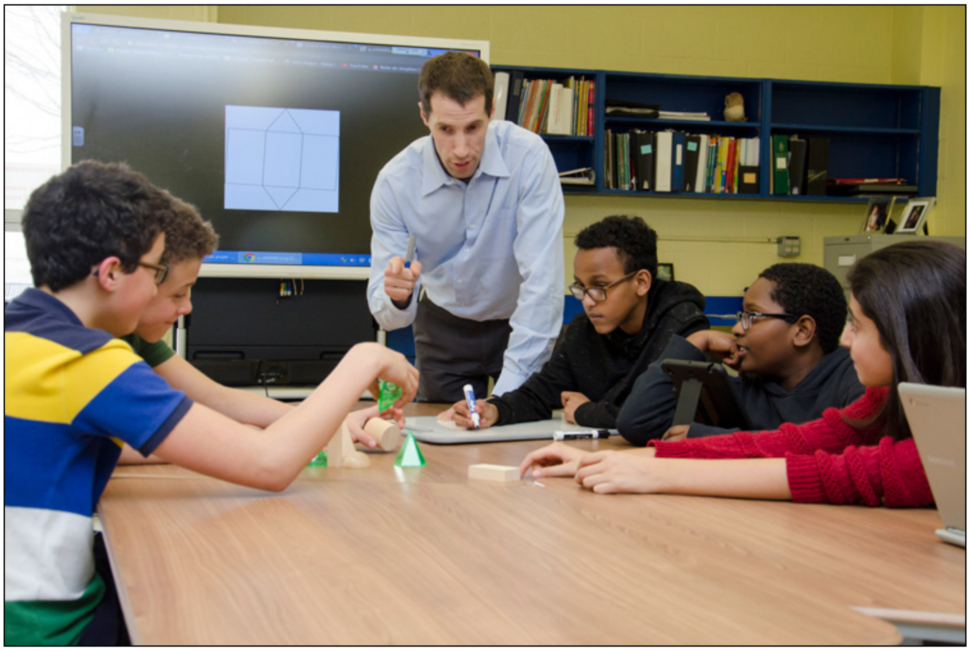
MESURE ET GÉOMÉTRIE ET SENS DE L'ESPACE		MESURE ET GÉOMÉTRIE	TRIGONOMÉTRIE
7E ANNÉE	**8E ANNÉE**	**9E ANNÉE**	**10E ANNÉE**
– définir et **créer des dallages réguliers** et semi-réguliers, à l'aide de matériel de manipulation, de papier à points ou de logiciels de géométrie.	– **tracer** et déterminer les coordonnées de l'image d'une figure obtenue suite à une rotation (multiples de 90°) de centre à l'origine dans un plan cartésien, avec ou sans outil technologique.	– vérifier et **appliquer des propriétés géométriques** à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique ou de matériel concret : – angles intérieurs et extérieurs d'un polygone […]; – angles formés par deux droites parallèles et une sécante […].	– résoudre, dans le cadre d'applications, **des problèmes dans le plan et dans l'espace** qui font appel à des triangles rectangles.
– **construire** différentes figures planes en utilisant des médiatrices et des bissectrices, à l'aide de divers outils.	– **construire** des polygones de mesures données, à l'aide d'un compas et d'une règle ou en utilisant un outil technologique.	– vérifier et **appliquer des propriétés géométriques** à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique ou de matériel concret : – propriétés des côtés et des diagonales de divers polygones.	
– réaliser, avec ou sans logiciel, **des vues de face, de côté et de dessus de divers solides**.	– explorer [et appliquer] **la notion d'homothétie** à l'aide de situations concrètes.		

(Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005a, p. 80, 81, 88 et 89)
(Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005b, p. 50 et 56)

Il importe que les enseignantes et enseignants soient conscients que, pour développer les habiletés et les concepts relatifs à la mesure et à la géométrie, les élèves doivent acquérir certaines habiletés spatiales. Cependant, selon le document *Mettre l'accent sur le raisonnement spatial M-12* (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2014), « [t]ous les types d'habiletés inhérentes à la pensée spatiale ne sont pas liés aux résultats en mathématiques dans la même mesure. L'apprentissage des mathématiques dépend plus de certaines habiletés de pensée spatiale que d'autres. » (p. 10) Le personnel enseignant doit donc aider les élèves à développer particulièrement leur visualisation spatiale et leur mémoire visuo-spatiale.

Il est évident que la construction ou la description de formes géométriques exige un raisonnement spatial. Cependant, l'enseignante ou l'enseignant doit aussi se rendre compte que, pour estimer, les élèves utilisent des stratégies qui exigent une pensée spatiale et, en particulier, la visualisation spatiale.

Pour en savoir plus sur les stratégies d'estimation, telles que la comparaison à des repères mentaux, la décomposition, la création de subdivisions ou l'itération mentale, consulter le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 4e à la 6e année*, Mesure, 2010c, p. 18 et 19.



LA VISUALISATION SPATIALE

> La visualisation spatiale s'est révélée particulièrement importante pour l'apprentissage des mathématiques et la réussite dans ce domaine. Étendant son influence sur toutes les années d'études et dans tous les domaines, la visualisation spatiale est un concept essentiel qui favorise la compréhension et la créativité en mathématiques chez les apprenants (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2014, p. 10).

QU'EST-CE QUE LA VISUALISATION SPATIALE?
La visualisation spatiale est un type particulier de pensée spatiale qui implique l'utilisation de notre imagination pour « générer, mémoriser, extraire et transformer des images visuelles bien structurées » (Lohman, 1996, traduction libre, p. 98); elle est parfois envisagée comme étant la capacité à penser avec l'« intelligence de l'œil » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2014, p. 10).

La visualisation spatiale se développe en pratiquant certaines habiletés spatiales qu'a identifiées John Del Grande (1990), y compris la rotation mentale.

HABILETÉS SPATIALES RELATIVES À LA VISUALISATION SPATIALE	DESCRIPTION
1. Coordination oculomotrice	Habileté à coordonner la vue et les mouvements du corps.
2. Perception de plans (forme et fond)	Habileté à percevoir un élément précis figurant sur une toile de fond complexe (intersections, superpositions).
3. Constance des formes	Habileté à reconnaître des figures géométriques indépendamment de leur taille, de leur couleur et de leur orientation dans l'espace.
4. Perception des positions	Habileté à percevoir la position d'un objet par rapport à soi. Habileté à discriminer des objets identiques, peu importe leur orientation.
5. Perception des relations spatiales	Habileté à percevoir la position d'au moins deux objets par rapport à soi ou d'un objet par rapport à l'autre.

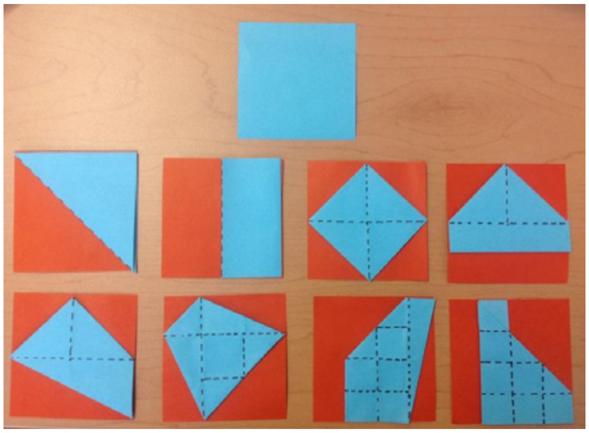
HABILETÉS SPATIALES RELATIVES À LA VISUALISATION SPATIALE	DESCRIPTION
6. Discrimination visuelle	Habileté à identifier les ressemblances et les différences entre deux ou plusieurs objets.
7. Rotation mentale	Habileté à « […] faire tourner mentalement des objets bidimensionnels ou tridimensionnels » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2014, p. 13).

(John Del Grande, 1990. Copyright © 2019, National Council of Teachers of Mathematics. The Arithmetic Teacher, vol. 37, nº 6.)

Activité 1 – Pliages pour construire des concepts

Détermine le nombre de figures pouvant être créées en pliant un carré de diverses façons, en vue de représenter la moitié de sa surface. Utilise des arguments mathématiques pour justifier l'exactitude de chaque construction.

Voici des exemples de solutions :

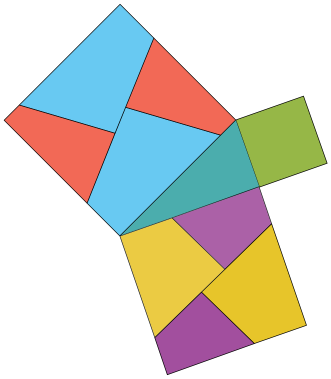


1. En se servant d'une seconde couleur de papier, l'élève démontre que le papier plié représente la moitié de la surface initiale. Elle ou il peut ainsi explorer le concept de symétrie.
2. En analysant l'endos du papier plié et en remarquant les chevauchements, l'élève constate qu'uniquement la moitié de la surface est visible. Le concept de congruence peut ainsi être exploré.
3. En analysant l'endos du trapèze isocèle (deuxième figure de la seconde rangée), cela devient particulièrement intéressant pour l'élève d'explorer les concepts de symétrie et de congruence.

Habiletés à développer relatives à la visualisation spatiale :

- Perception de plans
- Perception des positions
- Rotation mentale

ACTIVITÉ 2 – TOUT UN CASSE-TÊTE!



Selon le programme-cadre de mathématiques, 8e année, les élèves doivent comprendre le théorème de Pythagore et être en mesure de l'appliquer en vue de « déterminer s'il y a une relation entre les angles formés par les côtés d'un triangle rectangle (théorème de Pythagore), en utilisant des modèles, des diagrammes et des logiciels » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005a, p. 89). L'activité proposée ci-dessous explore la relation de Pythagore.

Distribuer aux élèves le casse-tête de l'**Annexe 1** ou créer un casse-tête dans un logiciel de géométrie dynamique. Téléverser un document sur une plateforme Web afin que les élèves puissent y consigner leurs observations.

Demander aux élèves de faire le casse-tête en tenant compte des consignes suivantes :

1. Choisis le triangle, puis place-le au milieu de ton pupitre.
2. Assemble certaines pièces du casse-tête autour du triangle de manière à former un carré sur chacun des côtés de la figure.
3. Quelles sont tes observations?
4. Fais part de tes observations à une ou à un autre élève ou consigne-les dans le document téléversé.
5. Quelles sont les caractéristiques du triangle?
6. Si les dimensions du triangle étaient 3 cm, 4 cm et 5 cm, quelle relation pourrais-tu établir en partant de tes observations?
7. Si les dimensions du triangle étaient 5 cm, 8 cm et 10 cm, serais-tu en mesure d'établir une relation en partant de tes observations?
8. Quelles conclusions peux-tu tirer à la suite de cette activité?

Habiletés à développer relatives à la visualisation spatiale :

- Perception de plans
- Constance des formes
- Perception des positions
- Discrimination visuelle
- Rotation mentale

Le raisonnement spatial

Activité 3 – Mystérieuses ruines

Distribuer aux élèves l'**Annexe 2** et l'**Annexe 3**. Leur présenter le problème suivant :

Sur un site archéologique, une équipe de fouilles a mis au jour les ruines d'un très ancien monument. Afin que les archéologues puissent le reconstituer, un des fouilleurs a tracé les vues de chacun des quatre côtés (est, ouest, nord, et sud).

Les archéologues veulent faire une maquette des ruines de ce monument avec des cubes d'après les quatre vues que le fouilleur a tracées. Ils se rendent compte qu'il y a plusieurs dispositions possibles des cubes qui respectent les vues.

Pouvez-vous, à l'aide de cubes emboîtables, construire une maquette de l'une de ces dispositions? Pouvez-vous en construire une avec le moins de cubes possible?

(Ministère de l'Éducation de l'Ontario, fascicule 1, 2006, p. 86, traduit et adapté avec permission de Mathematics in the City Summer Institute, 2005, City College of New York : www.mitcccny.org)

Cette activité est axée sur les contenus d'apprentissage relatifs aux vues de solides.

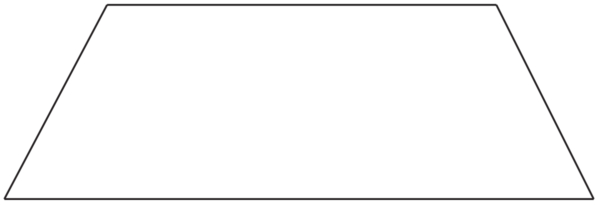
Pour en savoir plus, consulter le *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 4e à la 6e année,* Géométrie et sens de l'espace, fascicule 1 : Formes géométriques, 2006, p. 86 à 91 et p. 101 à 103.

Habiletés à développer relatives à la visualisation spatiale :

- Coordination oculomotrice
- Perception des positions
- Perception des relations spatiales

Activité 4 – Aire d'une figure plane

Demander aux élèves de déterminer l'aire d'une nouvelle figure plane telle que le trapèze.



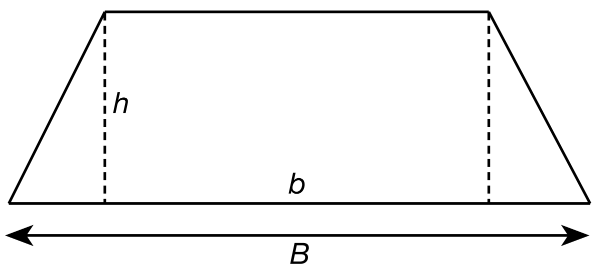
Cette activité est axée sur les contenus relatifs à la découverte de formules et à l'établissement de relations entre les diverses formules d'aire.

L'élève 1 visualise le trapèze comme un rectangle et deux triangles.

L'élève 2 visualise le trapèze comme un parallélogramme et un triangle.

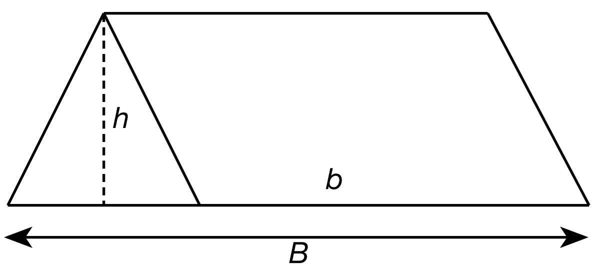
L'élève 3 visualise le trapèze comme deux triangles.

Élève 1



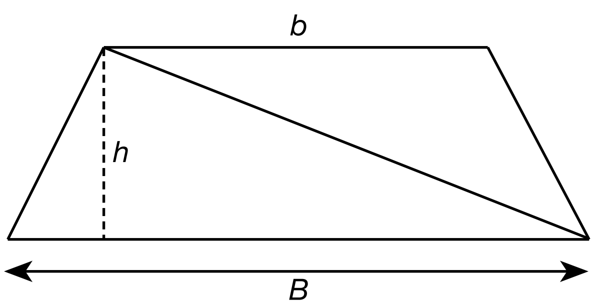
$$A = b \times h + \left[\frac{\frac{B-b}{2} \times h}{2}\right] + \left[\frac{\frac{B-b}{2} \times h}{2}\right]$$

Élève 2



$$A = b \times h + \left[\frac{(B-b) \times h}{2}\right]$$

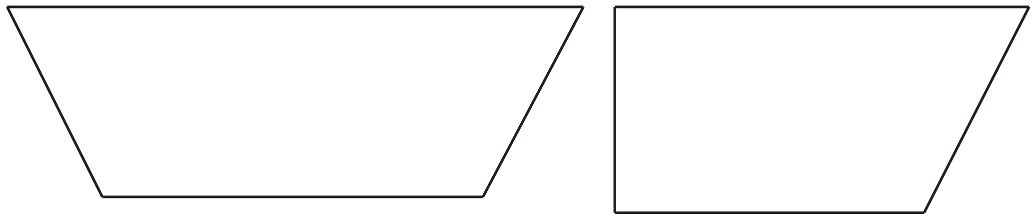
Élève 3



$$A = \frac{B \times h}{2} + \frac{b \times h}{2}$$

Au moment de l'échange mathématique, comparer les équations qu'ont écrites les élèves, puis déterminer une formule pour calculer l'aire d'un trapèze. Animer une discussion en groupe-classe au sujet de l'efficacité des solutions présentées.

Vérifier avec les élèves la formule obtenue en calculant l'aire d'autres trapèzes orientés de diverses façons (base plus longue au haut, angle droit, angle non symétrique, etc.)



Habiletés à développer relatives à la visualisation spatiale :

- Perception des relations spatiales
- Rotation mentale

Activités relatives à la géométrie, à la mesure et à la trigonométrie

Les sites Web ci-dessous proposent des exemples d'activités relatives à la géométrie, à la mesure et à la trigonométrie, favorisant le développement de la visualisation spatiale. Le personnel enseignant peut s'en inspirer afin de présenter aux élèves des activités de mathématiques en français.

Activités utilisant des tangrams, des mosaïques géométriques, des casse-tête géométriques (*polyarcs*), des pentominos, etc.
mathedpage.org/manipulatives/pattern-blocks (Henri Picciotto, [s. d.])

Activités axées sur les cercles, la trigonométrie, les triangles, les transformations, etc.
teachmathematics.net/page/2999/activities (Jim Noble, Oliver Bowles et Richard Wade, 2018)

Activités axées sur la géométrie et la mesure visant l'acquisition d'habiletés spatiales notamment la coordination oculomotrice
graphingstories.com (Dan Meyer et Buzzmath, [s. d.])

Activités axées sur la géométrie et la mesure visant l'acquisition d'habiletés spatiales notamment la discrimination visuelle
wodb.ca (Mary Bourassa, 2013)

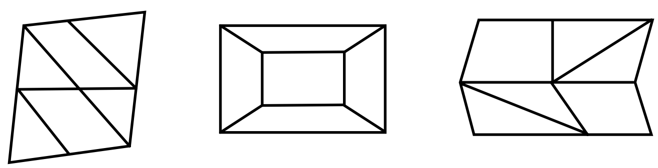
LA MÉMOIRE VISUO-SPATIALE

« De nouvelles recherches suggèrent qu'en ce qui concerne l'apprentissage des mathématiques et les résultats dans ce domaine, la mémoire de travail visuo-spatiale joue un rôle essentiel » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2014, p. 14).

QU'EST-CE QUE LA MÉMOIRE VISUO-SPATIALE?
« La mémoire de travail visuo-spatiale fait référence à la mémoire temporaire (mémoire à court terme) et à la manipulation d'informations visuelles et spatiales » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2014, p. 14).

Activité 1 – Dessinons et mémorisons!

Grouper les élèves en équipes de deux. Leur demander de créer un dessin semblable à l'un de ceux montrés ci-dessous, à l'aide d'un logiciel.

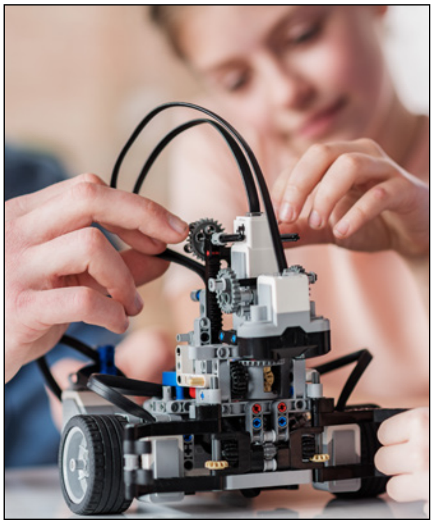


Démarche :

- Une ou un élève montre son dessin à sa ou à son partenaire pendant environ trois secondes.
- L'élève cache son écran et demande à sa ou à son partenaire de reproduire le dessin de mémoire sur une feuille blanche ou sur son écran.
- Au besoin, l'élève montre de nouveau son dessin à sa ou à son partenaire pour lui permettre de modifier son travail.
- Les élèves refont l'activité en inversant les rôles.

Conclure l'activité en demandant aux élèves de discuter des moyens utilisés pour se rappeler le dessin et le décrire. Les amener à comprendre que le but de l'activité n'est pas de juger de l'exactitude du dessin, mais plutôt d'explorer les nombreuses façons de percevoir, de mémoriser, de construire et de déconstruire une figure ou un solide. Leur mentionner également qu'elles et ils acquerront le vocabulaire propre à la géométrie au fur et à mesure qu'elles et ils réaliseront diverses activités.

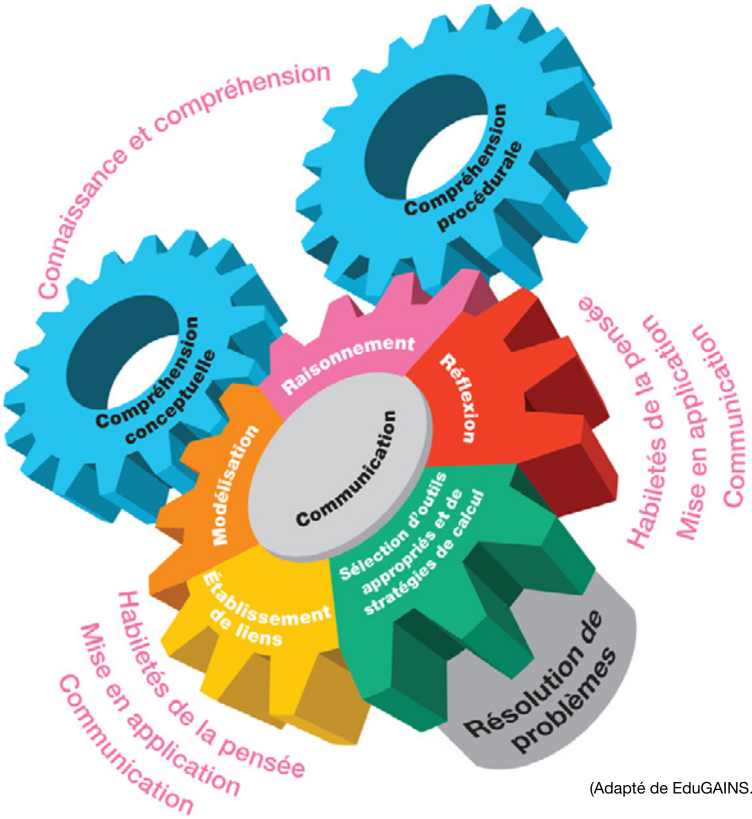
Activité 2 – Robot, où vas-tu?



À l'aide d'un robot de type LEGO[MC], une ou un élève programme une route, puis fait circuler le robot sur cette route. Les autres élèves observent le parcours et le reproduisent sur une grande feuille ou au TBI.

Cette activité pourrait aussi se faire à l'aide d'une tablette numérique ou pendant une activité de codage, comme celle présentée dans l'*InforMATHeur* (Association francophone pour l'enseignement des mathématiques en Ontario, mars 2018, p. 13 à 15). Ce type d'activité permet de développer le raisonnement spatial, mais aussi la pensée computationnelle.

Tout en tenant compte des éléments propres au développement du raisonnement spatial, l'enseignante ou l'enseignant doit intégrer, dans son enseignement, les éléments essentiels d'un enseignement efficace des mathématiques, notamment les compétences liées à la communication et à la résolution de problèmes, comme cela est décrit dans le fascicule 1.



(Adapté de EduGAINS.)

L'APPRENTISSAGE DE LA GÉOMÉTRIE

Dans une classe de mathématiques axée sur le développement du raisonnement, l'enseignante ou l'enseignant privilégiera le domaine de la géométrie. Ce domaine vise, en particulier, le développement des habiletés liées à la déduction et à la présentation d'arguments mathématiques cohérents. L'enseignante ou l'enseignant qui demande aux élèves les raisons pour lesquelles leur affirmation est vraie, doit observer la manière dont elles et ils abordent la question pour les aider à progresser dans l'acquisition d'habiletés en géométrie. Selon les recherches portant sur la pensée géométrique (van Hiele, Uziskin, Burger et Shaughnessy, et Braconne-Michoux), la façon dont les élèves justifient leur raisonnement géométrique montre leur niveau de pensée en géométrie. L'élève qui, par exemple, justifie qu'un triangle est isocèle, car il ressemble à un chapeau pointu, devra éventuellement réussir à verbaliser cette caractéristique en disant qu'au moins deux des côtés du triangle ou deux de ses angles sont congrus.

L'amélioration de la capacité des élèves à argumenter provient de l'expérience qu'elles et ils acquièrent en découvrant et en explorant les propriétés géométriques de figures, en organisant les figures, en les comparant avec d'autres et en les associant à un vocabulaire précis. Par conséquent, une ou un même élève pourrait atteindre des niveaux de pensée différents selon l'apprentissage effectué pour un objet spécifique. L'enseignante ou l'enseignant ne devrait donc pas déterminer un niveau de pensée en géométrie correspondant à l'ensemble des connaissances de l'élève, mais plutôt à des apprentissages plus précis.

Chaque niveau de pensée en géométrie est associé à un langage spécifique. Un même mot peut évoquer des idées particulières chez des élèves d'années d'études différentes. Le mot *carré*, par exemple, véhicule certaines informations pour l'élève du primaire qui s'engage dans une activité lui demandant de classer des formes géométriques de même famille. Toutefois, l'élève de 9e année reconnaît que, dans un carré, les diagonales sont de mêmes longueurs et se coupent en leur milieu, ce qui lui permet de résoudre un problème en partant de ces caractéristiques. (Inspiré de Braconne-Michoux, 2014, p. 26.)

LES NIVEAUX DE PENSÉE EN GÉOMÉTRIE

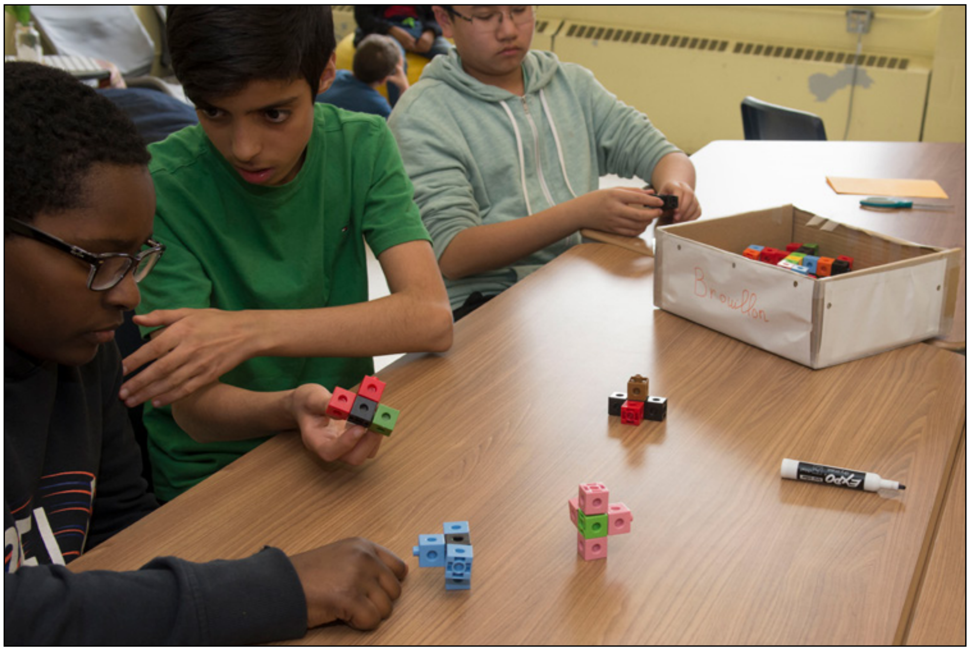
Selon Braconne-Michoux (2014), les chercheurs, Dina van Hiele-Geldof et Pierre van Hiele, sont les premiers à avoir conçu un modèle pour décrire les niveaux de pensée en géométrie. Il s'agit d'un modèle à cinq niveaux qui a été adapté au cours des dernières décennies et qui est encore reconnu aujourd'hui. Les élèves peuvent progresser d'un niveau de pensée à un autre dans la mesure où elles et ils font des activités visant la comparaison et la classification de formes géométriques, ainsi que l'analyse des propriétés de ces formes. L'enseignante ou l'enseignant qui reconnaît les niveaux de pensée auxquels se situent les élèves, en se fiant à certains comportements observables, est davantage en mesure de les aider à réaliser des analyses géométriques et à développer progressivement leur capacité à raisonner.

DESCRIPTION	COMPORTEMENTS OBSERVABLES	EXEMPLES
Niveau 0 (identification-visualisation) « Perception et classement des formes géométriques […] » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006, p. 13) selon leur aspect global sans établir de liens entre les formes géométriques et leurs propriétés.	L'élève : – reconnaît une forme géométrique en partant de son apparence et justifie son classement en la comparant avec un objet familier. – a de la difficulté à identifier une forme géométrique lorsqu'elle n'est pas montrée selon son orientation la plus courante. – classe les formes géométriques en se basant sur la relation d'exclusion.	L'élève : – identifie un solide comme étant un cylindre en justifiant que le solide ressemble à une boîte de conserve. – identifie un carré comme étant un losange s'il est présenté « sur sa pointe ». (Adapté de Braconne-Michoux, 2014, p. 27.) – identifie le losange et le parallélogramme comme étant deux quadrilatères distincts plutôt que de voir que le losange est un cas particulier de parallélogramme.

DESCRIPTION	COMPORTEMENTS OBSERVABLES	EXEMPLES
Niveau 1 (analyse) « […] [A]nalyse des formes géométriques pour en découvrir les propriétés » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006, p. 13).	L'élève : – peut considérer les propriétés d'une forme géométrique comme étant des caractéristiques visuelles servant à décrire la forme géométrique. – peut identifier une forme géométrique à partir de symboles.	L'élève : – décrit le carré comme un quadrilatère qui a 4 sommets, 4 angles droits, 4 côtés congrus, et dont les diagonales ont la même longueur et se coupent à un angle droit. – peut accepter qu'une figure qui, selon lui, ressemble à un triangle équilatéral soit en fait un triangle isocèle en raison des traits qui se trouvent sur seulement deux de ses côtés.
Niveau 2 (déduction informelle) « Établissement de liens entre les formes géométriques et entre les propriétés d'une forme géométrique donnée » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006, p. 14).	L'élève : – peut se servir d'arguments logiques pour défendre une affirmation. – classe les formes géométriques en référant de moins en moins à leurs propriétés.	L'élève : – peut affirmer que, puisque tout quadrilatère ayant quatre angles droits est un rectangle et que tous les carrés ont quatre angles droits, alors automatiquement (obligatoirement, toujours, etc.) tous les carrés sont des rectangles. – reconnaît qu'il suffit de préciser que, si un parallélogramme a un angle droit, il s'agit d'un rectangle.
Niveau 3 (déduction formelle) « Étude des définitions, des preuves, des théorèmes, des axiomes et des postulats » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006, p. 14).	L'élève : – développe l'idée de l'importance des preuves. – explore différentes méthodes pour démontrer la même hypothèse. – communique ses démonstrations ou ses explications et les justifie au moyen d'arguments convaincants. – peut déterminer un contre-exemple pour démontrer qu'une hypothèse est fausse.	L'élève : – peut démontrer que tout quadrilatère formé par les milieux des côtés d'un quadrilatère est un parallélogramme. – peut démontrer que pour tous les quadrilatères, si deux diagonales se coupent en leur milieu, alors il s'agit d'un parallélogramme.

DESCRIPTION	COMPORTEMENTS OBSERVABLES	EXEMPLES
Niveau 4 (rigueur) Préoccupation au sujet de la nature même du système axiomatique. **Note :** Cette préoccupation dépasse largement les objectifs d'enseignement de la géométrie au secondaire.		

Pour l'ensemble du cycle intermédiaire, c'est-à-dire de la 7e à la 10e année, l'objectif est de faire progresser les élèves. Néanmoins, l'atteinte du niveau 2 est souhaitable pour chacune des années d'études. Cet objectif est le même que celui du développement du processus de raisonnement, soit que l'élève peut déduire, justifier et conclure. D'ailleurs, un des contenus d'apprentissage du domaine Mesure et géométrie du cours théorique de 9e année, précise que l'élève doit « confirmer des énoncés à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique ou de plusieurs exemples ou les infirmer au moyen d'un seul contre-exemple (p. ex., si un quadrilatère a des diagonales perpendiculaires, c'est un carré : confirmer ou infirmer) » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005b, p. 35).



L'ENSEIGNEMENT SELON LES NIVEAUX DE PENSÉE EN GÉOMÉTRIE

Selon Van de Walle et Lovin (2008), les explorations en géométrie que proposent aux élèves les enseignantes et enseignants sont les principaux facteurs qui déterminent la progression des apprenantes et des apprenants sur l'échelle du développement de la pensée géométrique. Les élèves progressent dans les divers niveaux de pensée en géométrie dans la mesure où elles et ils font des activités d'exploration, de manipulation, de construction, de visualisation, de comparaison et de transformation. Les activités d'exploration doivent leur permettre d'établir des relations entre les concepts géométriques afin de construire des idées signifiantes. De plus, la façon d'interagir avec elles et eux peut les inciter à passer à un niveau supérieur ou, tout au moins, à les mettre au défi de le faire.

Les niveaux de pensée en géométrie décrivent les idées des élèves relatives à la géométrie et la façon dont elles et ils perçoivent les formes. Chaque niveau est défini comme une suite de comportements logiques. L'apprenante ou l'apprenant qui progresse d'un niveau à un autre modifie sa pensée lorsqu'elle ou il décrit, perçoit ou compare les formes géométriques.

Au niveau 0 (identification-visualisation), les élèves reconnaissent les formes géométriques selon leur apparence, c'est-à-dire qu'elles et ils sont en mesure de reconnaître une figure plane ou un solide selon sa forme et de la décrire : « C'est un carré parce que ça ressemble à un carré. » Elles et ils sont capables d'affirmer que les formes géométriques sont semblables ou non, mais sans se référer à leurs propriétés ni au vocabulaire qui leur est associé. Elles et ils progressent dans ce niveau et en arrivent à classer ou à regrouper les formes géométriques. C'est aussi à ce stade que les élèves reconnaissent certains attributs avant de passer aux propriétés des formes géométriques. Elles et ils peuvent généraliser les caractéristiques d'une forme et l'appliquer à toutes les formes appartenant à la même classe, mais ne sont pas encore en mesure de décrire les sous-catégories (p. ex., le carré est aussi un rectangle). Les apprenantes et apprenants cheminent dans ce niveau pour en arriver à la description des formes géométriques à l'aide de leurs propriétés : « Cette figure plane est un carré parce qu'elle a 4 sommets, 4 angles droits, 4 côtés égaux et 2 paires de côtés parallèles. »

Au niveau 2 (déduction informelle), les élèves utilisent leurs connaissances des propriétés pour établir des liens entre les propriétés de figures géométriques (p. ex., si tous les angles mesurent 90°, alors la figure plane est un rectangle) ou entre les propriétés de figures planes (p. ex., un carré est un rectangle, un parallélogramme et un quadrilatère parce qu'il possède toutes les propriétés de ces trois polygones).

D’autres éléments entrent en jeu dans le développement des niveaux de pensée en géométrie :

- Les niveaux sont séquentiels, pour passer à un niveau plus élevé, les élèves doivent développer les idées et la compréhension relatives à un concept géométrique du niveau précédent.
- Les niveaux de pensée en géométrie ne dépendent pas de l’âge des élèves ni de l’année d’études. Certains adultes se situent au niveau 0. Les apprenantes et apprenants peuvent se situer au niveau 1 (analyse) concernant la compréhension d’un concept et au niveau 0 (visualisation) en ce qui a trait à la maîtrise d’un autre concept; par exemple, elles et ils décrivent certaines propriétés du carré (niveau 1 : analyse), mais ne reconnaissent le parallélogramme qu’à cause de son apparence (niveau 0 : identification-visualisation).
- Les élèves passent d’un niveau à un autre selon leur compréhension des différents concepts.
- Les élèves qui se situent au niveau 2 ont acquis les niveaux 0 et 1.
- Les facteurs qui influencent le plus le développement de la pensée géométrique sont les activités adaptées au niveau de pensée en géométrie des élèves. Le niveau de pensée en géométrie des apprenantes et des apprenants dépend des concepts enseignés et des stratégies utilisées.

Note : Les cinq niveaux du développement de la pensée géométrique qu’ont décrits van Hiele et van Hiele-Geldof ne sont aucunement liés aux quatre niveaux de rendement de la grille d’évaluation du rendement du programme-cadre de mathématiques.

L’enseignement au niveau 0 (identification-visualisation)

Au niveau 0, l’enseignante ou l’enseignant doit fournir aux élèves de nombreuses occasions de classer des objets géométriques. Il convient de mettre l’accent sur les similitudes et les différences entre les formes géométriques.

Une idée clé en géométrie est celle de l’invariabilité. Une part importante du temps consacré à l’étude de la géométrie devrait être employée à déterminer les changements possibles pour qu’une propriété reste vraie; par exemple, la somme des mesures des angles intérieurs d’un triangle ne varie pas, quels que soient les changements que peut subir un triangle. Ironiquement, plus l’enseignante ou l’enseignant impose des contraintes sur ce qui peut être changé, plus elle ou il aide les élèves à identifier des propriétés intéressantes; par exemple, au moment de l’exploration de la mesure des angles intérieurs et extérieurs de polygones, la contrainte de limiter l’exploration aux quadrilatères permettrait de vérifier si certaines propriétés identifiées s’appliquent aux quadrilatères convexes ou concaves.

Une contrainte supplémentaire qui consisterait à limiter l'exploration à des cas particuliers de quadrilatères tels que les parallélogrammes, les cerfs-volants et les losanges aiderait les élèves à déterminer ce qui est invariable.

L'enseignement au niveau 1 (analyse)

Au niveau 1, l'enseignante ou l'enseignant propose aux élèves des activités de construction de formes géométriques pour leur donner l'occasion d'analyser divers cas. Les activités de construction dynamique aident les élèves de ce niveau à progresser. Elles et ils peuvent explorer la construction de formes géométriques et, par la suite, grouper les formes en différentes classes en fonction de leurs caractéristiques.

L'enseignement au niveau 2 (déduction informelle)

Au niveau 2, l'enseignante ou l'enseignant aide les élèves à développer des habiletés liées à la déduction informelle en utilisant un vocabulaire approprié. Les élèves développent ces habiletés en acquérant de l'expérience à comprendre des énoncés relatifs à la déduction informelle; par exemple : « Si c'est ______, alors c'est aussi ___. »; « Tous les ____ sont des ____. » Des énoncés, comme ceux présentés ci-dessous, aident les apprenantes et apprenants à raisonner, mais aussi à acquérir le vocabulaire propre à la déduction informelle.

- **Si c'est** un rectangle, **alors** c'est aussi un parallélogramme.
- **Tous** les carrés **sont** des rectangles.
- **Certains** parallélogrammes **sont** des losanges.

Il importe d'inciter les élèves à examiner les propriétés d'une classe de figures afin de déterminer les **propriétés nécessaires** et les **propriétés suffisantes** pour décrire une forme géométrique. Une propriété nécessaire, si elle était retirée d'une description, ne définirait plus uniquement la figure en question; par exemple, en enlevant la propriété qu'un carré a au moins un angle droit, pour garder la propriété qu'un carré a quatre côtés congrus, la propriété conservée décrit le carré, mais aussi le losange. Pour décrire le carré, il est donc nécessaire d'avoir deux

Propriétés nécessaires

« Les propriétés nécessaires d'une forme géométrique constituent l'ensemble des propriétés que possède cette forme » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006, p. 32).

Propriétés suffisantes

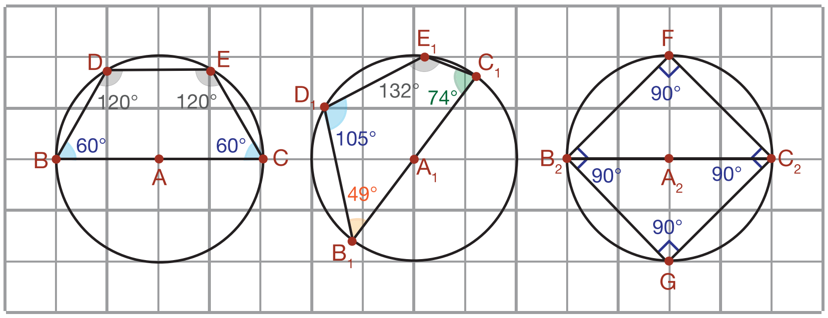
« Les propriétés suffisantes d'une forme géométrique constituent une liste minimale de propriétés qui suffisent à définir la forme. Cette liste forme donc un sous-ensemble de l'ensemble des propriétés nécessaires » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2006, p. 33).

propriétés, soit celle concernant la longueur de ses côtés et celle liée aux angles droits. C'est à partir de la 9e année que les élèves commencent à explorer les diagonales des quadrilatères. Elles et ils constatent alors qu'il est suffisant de ne décrire que les diagonales pour classer des quadrilatères; par exemple, elles et ils n'ont qu'à dire que les diagonales de la figure ont la même longueur et se croisent en leur milieu à un angle droit pour décrire le carré, les autres propriétés ne sont plus nécessaires.

Il faut encourager les élèves à énoncer des hypothèses et à les vérifier. Ainsi, à l'aide de questions du type « Pourquoi…? », elles et ils peuvent tenter de déterminer les raisons pour lesquelles il y a des relations particulières entre certains éléments d'une forme géométrique. En réalisant des activités à l'aide de la technologie, elles et ils sont en mesure d'analyser plus facilement de nombreux cas, de vérifier des hypothèses et de faire des conjectures. L'utilisation de logiciels de géométrie dynamique, tels que Cybergéomètre ou Geogebra, les aide à explorer plus facilement divers cas à l'intérieur même d'une classe de formes géométriques. En effet, les élèves dessinent des objets géométriques, puis les déplacent et les transforment de nombreuses façons. Ainsi, elles et ils examinent une forme géométrique, mais également un nombre important d'exemples faisant partie d'une même classe de figures. Lorsqu'une propriété d'une forme géométrique est conservée à la suite d'une transformation, c'est qu'il s'agit d'une caractéristique de la forme géométrique et qu'en plus elle suffit pour décrire une classe entière de formes géométriques.

L'enseignante ou l'enseignant peut, par exemple, demander à des élèves de nommer des quadrilatères différents ayant comme propriété des diagonales qui se coupent en leur milieu. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, les élèves créent un premier quadrilatère dont deux des sommets sont les extrémités d'un segment de droite et dont les deux autres sommets sont des points sur un cercle qui partage son centre avec le point milieu du segment. Les fonctionnalités du logiciel font en sorte qu'il est facile de mesurer des longueurs ou des angles. À partir de ces mesures, les élèves peuvent justifier le nombre de quadrilatères différents pouvant être formés.

Voici des exemples de quadrilatères obtenus à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :

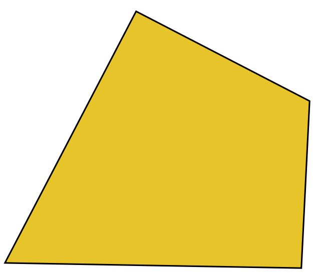


Selon le programme-cadre de mathématiques, 9e année, les élèves doivent « vérifier et appliquer des propriétés géométriques à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique ou de matériel concret [...] », plus spécifiquement les propriétés des côtés et des diagonales de quadrilatères, et « communiquer et justifier les étapes de [leur] raisonnement au moyen d'arguments convaincants et à l'aide du vocabulaire approprié » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005b, p. 35). Selon le programme-cadre de mathématiques, 10e année théorique, les élèves doivent « déterminer les caractéristiques d'un quadrilatère dont les sommets sont donnés (p. ex., propriétés des diagonales, parallélogramme formé par les milieux des côtés, périmètre) » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005b, p. 49).

Les deux activités proposées ci-dessous initient les élèves à l'analyse de certaines caractéristiques de quadrilatères. Au début de chacune des activités, les apprenantes et apprenants se situent au niveau 0 (identification-visualisation) des niveaux de pensée en géométrie. En faisant l'activité, elles et ils progresseront jusqu'au niveau 2 (déduction informelle), soit le niveau ciblé. Il est important que les élèves visualisent les caractéristiques de différents quadrilatères pour mieux comprendre les généralisations qui en découlent. Ces caractéristiques sont des éléments essentiels pour résoudre d'autres problèmes, comme déterminer les mesures des angles dans une figure plane ou résoudre des problèmes de trigonométrie, en 10e année.

Activité 1 – Les quadrilatères

Distribuer aux élèves un ensemble de quadrilatères (**Annexe 4**) ou leur demander d'en dessiner en utilisant un logiciel de géométrie dynamique. Leur distribuer également le tableau des observations (**Annexe 5**) ou téléverser un document sur une plateforme Web afin qu'elles et ils puissent y consigner leurs observations.



Étape 1

Demander aux élèves d'observer les quadrilatères, d'en déterminer les caractéristiques, puis de remplir la première colonne du tableau des observations.

Elles et ils devraient être en mesure de reconnaître les sortes de quadrilatères (parallélogramme, trapèze rectangle, trapèze isocèle, carré, losange, chevron, cerf-volant, quadrilatères quelconques) ainsi que leurs caractéristiques (côtés égaux, côtés parallèles, côtés perpendiculaires, angles congrus).

À cette étape-ci, le niveau de pensée en géométrie des élèves est au niveau 0, soit l'identification-visualisation; elles et ils s'approprient les caractéristiques des différents quadrilatères.

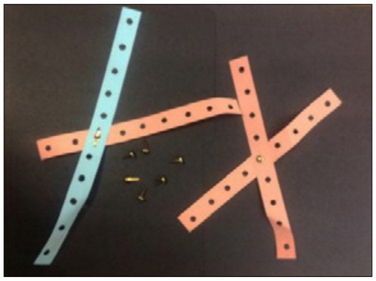
Interaction au niveau 0 : Inviter les élèves à vérifier si leurs observations relatives à un quadrilatère s'appliquent à d'autres quadrilatères semblables; par exemple :

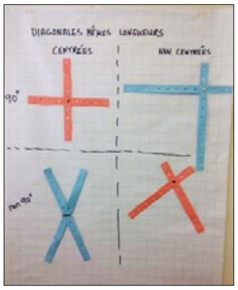
– Vérifiez si les mêmes caractéristiques s'appliquent à d'autres quadrilatères.

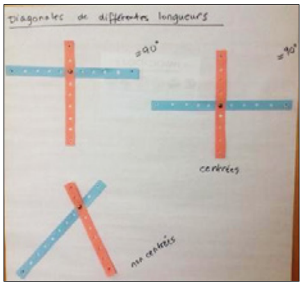
– Dessinez un quadrilatère qui a quatre côtés égaux, mais aucun angle droit.

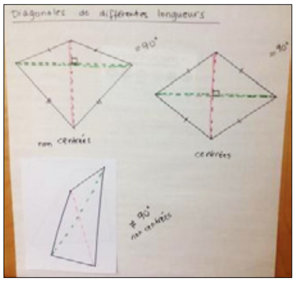
Étape 2

À cette étape-ci, le niveau de pensée en géométrie des élèves est au niveau 1, soit l'analyse. Demander aux élèves de tracer les diagonales des quadrilatères en utilisant du matériel de manipulation ou un logiciel de géométrie dynamique, puis d'écrire leurs observations dans la deuxième colonne du tableau. L'exploration des diagonales des quadrilatères peut se faire à l'aide de bandes de papier trouées et d'attaches parisiennes ou avec des bâtonnets en plastique, comme les Geostix. Les bandes de papier représentent les diagonales pouvant être croisées de différentes façons et fixées à l'aide d'attaches parisiennes. Ainsi, les élèves pensent aux propriétés et aux caractéristiques propres aux formes géométriques qu'il est possible de créer lorsque deux segments se croisent. En explorant divers croisements de segments, cela les aide à reconnaître des classes de figures. Elles et ils peuvent ainsi regrouper des figures en une classe, soit les quadrilatères, en fonction de la longueur de leurs diagonales, du rapport entre les parties de ces diagonales et de la présence ou non d'un angle de 90 degrés.









Interaction au niveau 1 : Inviter les élèves à explorer la façon dont se coupent les diagonales des différents quadrilatères ainsi que l'endroit où elles se coupent; par exemple :

– Y a-t-il plusieurs quadrilatères dont les diagonales se coupent en leur milieu?

– Y a-t-il des quadrilatères dont les diagonales se coupent à un angle de 90°?

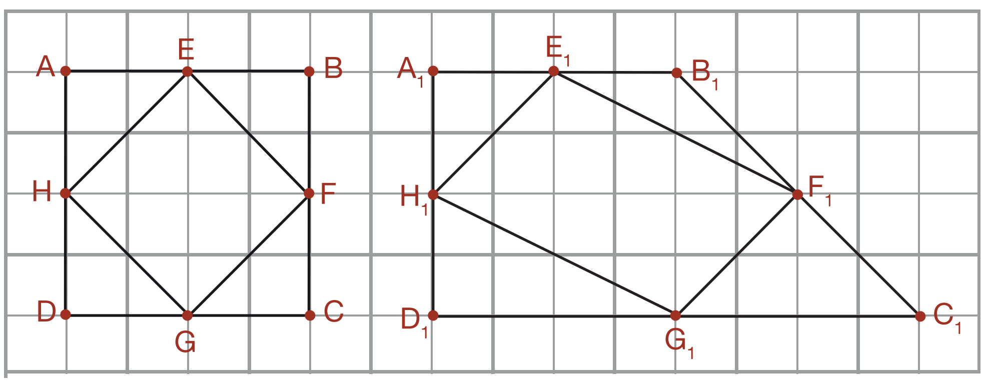
Étape 3

Demander aux élèves de joindre les milieux des côtés de chaque figure de manière à former un autre quadrilatère et d'écrire leurs observations dans la dernière colonne du tableau. À cette étape-ci, le niveau de pensée en géométrie des élèves est encore au niveau 1.

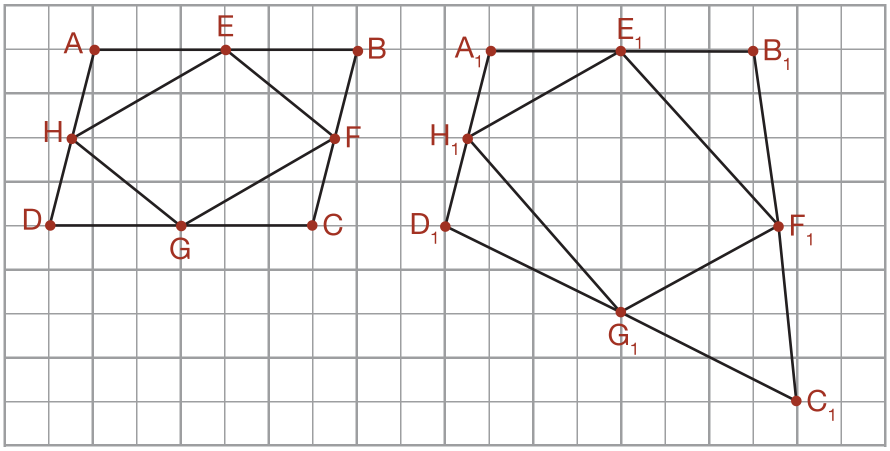
Étape 4

Demander aux élèves d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique, de formuler des hypothèses à la suite de leurs observations, de tirer des conclusions et de faire des généralisations. À cette étape-ci, le niveau de pensée en géométrie des élèves est au niveau 2, soit la déduction informelle.

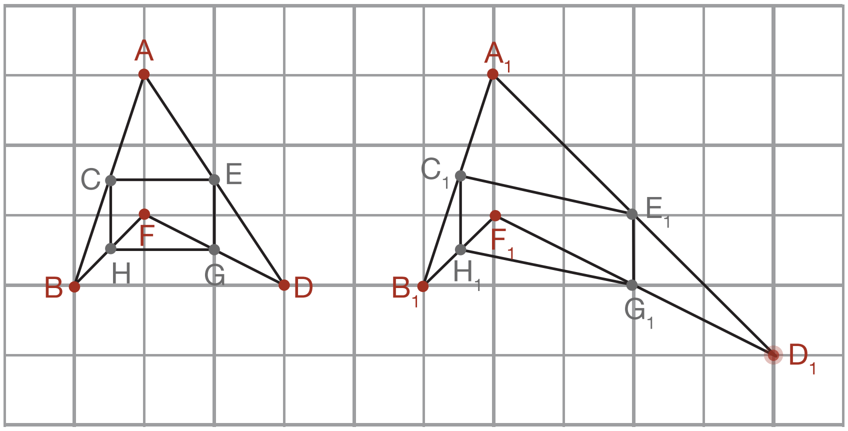
Dans l'exemple ci-dessous, la figure ABCD est un carré et la figure intérieure est aussi un carré ou un parallélogramme. Si le sommet C est déplacé horizontalement vers la droite, la figure obtenue est un trapèze rectangle et la figure intérieure est encore un parallélogramme.



Dans l'exemple ci-dessous, la figure ABCD est un parallélogramme et la figure HEFG est aussi un parallélogramme. Si le sommet C est déplacé vers la droite et vers le bas, la figure obtenue est un quadrilatère quelconque et la figure intérieure est également un parallélogramme.



Dans l'exemple ci-dessous, la figure ADFB est un quadrilatère convexe et la figure CEGH est un parallélogramme. Si le sommet D est déplacé vers la droite et vers le bas, la figure obtenue est un autre quadrilatère convexe et la figure intérieure obtenue est encore un parallélogramme.



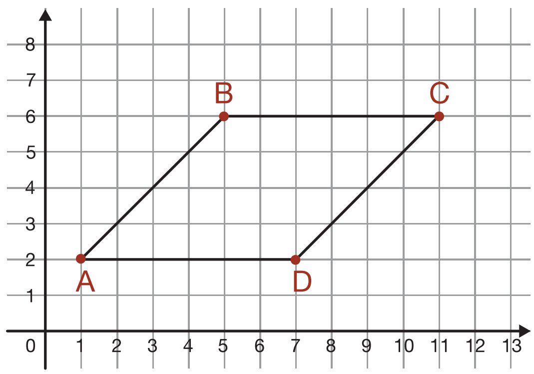
Interaction au niveau 2 : Inviter les élèves à explorer différentes méthodes pour démontrer la même hypothèse; par exemple :

– Comment pouvez-vous démontrer, à l'aide de la géométrie, que si deux diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, alors il s'agit d'un parallélogramme?

– Comment pouvez-vous démontrer, à l'aide de la géométrie, que la figure qui relie les milieux des côtés d'un trapèze isocèle est toujours un parallélogramme?

Il serait intéressant de faire un lien avec la géométrie analytique, 10e année théorique, en s'attardant au contenu d'apprentissage : « résoudre des problèmes à plusieurs étapes qui font appel à la pente, à la distance et au milieu du segment d'une droite » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005b, p. 49) afin de démontrer que la figure intérieure initiale et celle obtenue sont des parallélogrammes.

D'abord, les élèves déterminent le milieu de chacun des côtés du parallélogramme dans la figure suivante.



$$M_{AB} = \left(\frac{5+1}{2}, \frac{6+2}{2}\right)$$

$$M_{AB} = (3,4)$$

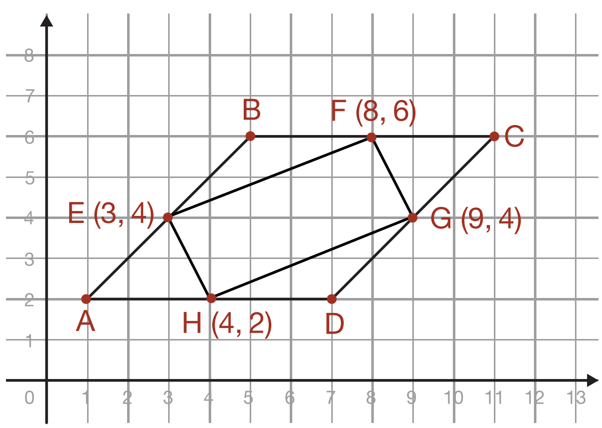
De la même manière, elles et ils déterminent les milieux des autres côtés.

$$M_{BC} = (8,6)$$

$$M_{CD} = (9,4)$$

$$M_{AD} = (4,2)$$

Puis, elles et ils calculent la distance entre les points E et F ainsi qu'entre les points H et G, afin de déterminer la longueur du segment EF et celle du segment HG. De même, elles et ils calculent la distance entre les points H et E ainsi qu'entre les points G et F, afin de déterminer la longueur du segment HE et celle du segment GF.



$$d_{EF} = \sqrt{(6-4)^2 + (8-3)^2}$$

$$d_{EF} = \sqrt{(2)^2 + (5)^2}$$

$$d_{EF} = \sqrt{29}$$

$$d_{HG} = \sqrt{(4-2)^2 + (9-4)^2}$$

$$d_{HG} = \sqrt{(2)^2 + (5)^2}$$

$$d_{HG} = \sqrt{29}$$

$$d_{HE} = \sqrt{(4-2)^2 + (3-4)^2}$$

$$d_{HE} = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2}$$

$$d_{HE} = 5$$

$$d_{GF} = \sqrt{(6-4)^2 + (8-9)^2}$$

$$d_{GF} = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2}$$

$$d_{GF} = 5$$

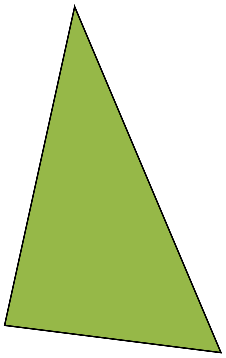
Puisque les longueurs des côtés opposés sont égales, elles et ils concluent que le quadrilatère inscrit dans la figure ABCD est un parallélogramme.

Selon le programme-cadre de 10e année théorique, les élèves doivent :

> […] vérifier des propriétés géométriques de triangles et de quadrilatères dont les sommets sont donnés (p. ex., le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle; les diagonales d'un parallélogramme; […]); communiquer et justifier [leurs] démonstrations ou [leurs] explications au moyen d'arguments convaincants exprimés en phrases complètes et à l'aide d'une notation et d'un vocabulaire appropriés (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2005b, p. 49).

L'enseignante ou l'enseignant pourrait donc demander à des élèves de formuler une hypothèse expliquant les raisons pour lesquelles la longueur d'un segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est toujours la moitié de la longueur du troisième côté. Ce problème peut être résolu en faisant un diagramme ou en utilisant un plan cartésien ou un logiciel de géométrie dynamique.

Activité 2 – Les triangles



Distribuer aux élèves un ensemble de triangles (**Annexe 6**) ou leur demander d'en illustrer en utilisant un logiciel de géométrie dynamique. Leur distribuer également le tableau des observations (**Annexe 7**) ou téléverser un document sur une plateforme Web afin qu'elles et ils puissent y consigner leurs observations.

Étape 1

Demander aux élèves d'observer les triangles, d'en déterminer les caractéristiques et de remplir la première colonne du tableau des observations.

Elles et ils devraient être en mesure de reconnaître les sortes de triangles (triangle rectangle, triangle isocèle, triangle isocèle rectangle, triangle équilatéral, triangle scalène, triangle acutangle et triangle obtusangle) ainsi que leurs caractéristiques (côtés congrus, angles congrus, côtés perpendiculaires).

À cette étape-ci, le niveau de pensée en géométrie des élèves est au niveau 0, soit l'identification-visualisation; elles et ils s'approprient les caractéristiques des différents triangles.

Interaction au niveau 0 : Inviter les élèves à vérifier si leurs observations relatives à un triangle s'appliquent à d'autres triangles semblables; par exemple :

– Vérifiez si certaines caractéristiques d'un triangle isocèle s'appliquent à d'autres triangles.

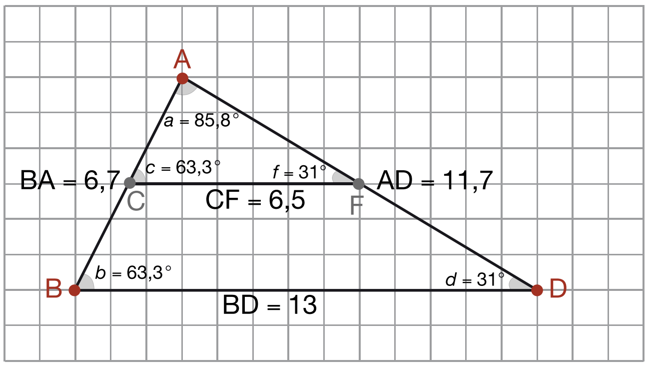
– Dessinez un triangle obtusangle isocèle ou un triangle obtusangle rectangle.

– Que pouvez-vous dire au sujet du plus grand côté d'un triangle?

Étape 2

À cette étape-ci, le niveau de pensée en géométrie des élèves est au niveau 1, soit l'analyse. Demander aux élèves de repérer les milieux de deux des côtés des triangles et de tracer le segment de droite qui joint ces milieux. Puis, les inviter à vérifier l'énoncé en prenant les mesures nécessaires. Finalement, leur demander d'écrire leurs observations dans la deuxième colonne du tableau. Elles et ils pourraient aussi se servir d'un logiciel de géométrie dynamique pour faire le même travail.

Voici un exemple de triangle et de mesures que les élèves pourraient obtenir à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique :



Interaction au niveau 1 : L'enseignante ou l'enseignant pose des questions aux élèves afin de les aider à faire d'autres constats au sujet de la figure avant qu'elles et ils proposent des hypothèses.

1. Enseignante ou enseignant : « À part le fait que la longueur du segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est la moitié de celle du troisième côté, que pouvez-vous dire de plus au sujet de ces deux segments? »

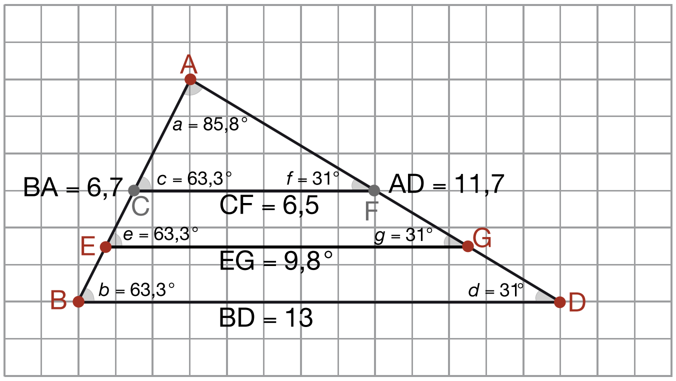
   Les élèves peuvent déduire ceci : « Ces segments sont parallèles, car j'ai pu vérifier que $\angle$ ACF = $\angle$ CBD. »

2. Enseignante ou enseignant : « Combien de triangles forment la figure? Que remarquez-vous à leur sujet? »

   Les élèves peuvent remarquer ceci : « Le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle forme un plus petit triangle, soit Δ ACF, dont les angles sont congrus aux angles correspondants du grand triangle, soit Δ ABD. »

3. Enseignante ou enseignant : « Que remarquez-vous lorsque vous comparez les longueurs des côtés du triangle ABD à celles des côtés correspondants du triangle ACF? »

   Les élèves peuvent remarquer ceci : « Le rapport de 2 à 1 ne décrit pas uniquement la relation entre les segments BD et CF, mais aussi celle entre les segments AB et AC ainsi qu'entre les segments DA et FA. »



4. Enseignante ou enseignant : « Est-il vrai qu'un autre segment parallèle au côté BD du triangle ABD crée des relations semblables à celles observées pour le segment de droite CF? »

   Les élèves peuvent vérifier ceci : « Cela est toujours vrai, puisqu'il s'agit de construire divers triangles semblables. »

Étape 3

Demander aux élèves d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique, de formuler des hypothèses à la suite de leurs observations, de tirer des conclusions et de faire des généralisations. À cette étape-ci, le niveau de pensée en géométrie des élèves est au niveau 2, soit la déduction informelle.

Interaction au niveau 2 : Inviter les élèves à proposer des hypothèses, à les vérifier et à faire une généralisation; par exemple :

– La longueur du segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est toujours la moitié de la longueur du côté parallèle.

– La longueur du segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle est toujours parallèle à la base du triangle.

– Lorsque les milieux de deux côtés d'un triangle sont joints, alors les triangles formés sont semblables.

La communication orale ou écrite demeure un élément clé pour assurer chez les élèves une compréhension en profondeur des concepts. Le rôle de l'enseignante ou de l'enseignant est de faciliter la communication mathématique au moment de l'exploration et pendant les échanges mathématiques en petits groupes ou en groupe-classe. L'enseignante ou l'enseignant encourage les élèves à faire part aux autres de leurs hypothèses et à justifier celles-ci à l'aide d'arguments convaincants et d'un vocabulaire approprié. De plus, elle ou il doit susciter la réflexion des apprenantes et des apprenants en les encourageant à expliquer leur raisonnement pendant les échanges et les moments de consolidation. Les discussions doivent être orientées de façon à leur permettre d'établir des liens entre les différentes représentations et les concepts mathématiques.

LE DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE GÉOMÉTRIQUE

Lorsque l'enseignement est axé sur le développement du raisonnement géométrique, il est essentiel que l'enseignante ou l'enseignant s'attarde à l'exploration des propriétés géométriques. Dans un plan à trois dimensions, par exemple, elle ou il varie la perspective des formes géométriques présentées aux élèves afin qu'elles et ils ne les associent pas uniquement à leur perspective la plus courante. Elle ou il leur offre également l'occasion de dessiner, de construire, d'assembler et de décomposer des figures et des solides (p. ex., un cylindre surmonté d'une demi-sphère) afin qu'elles et ils puissent assimiler leurs propriétés géométriques et s'en servir pour en faire la description.

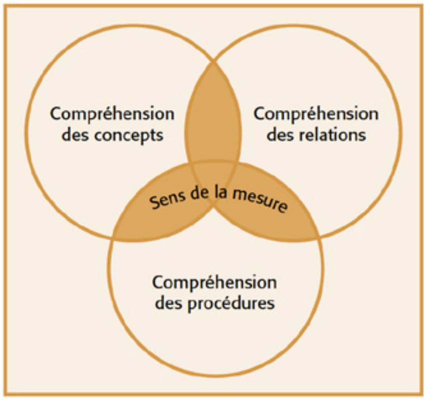
Bien que la connaissance de certaines notions et que l'appropriation du vocabulaire propre à la géométrie soient importantes, les élèves ne développeront pas leurs habiletés en géométrie en mémorisant des définitions, mais plutôt en améliorant leur capacité à penser, à raisonner, à valider et à justifier. La géométrie est donc un domaine dont l'un des principaux objectifs est le développement d'un des processus mathématiques, soit le raisonnement, plus spécifiquement le raisonnement géométrique.

L'APPRENTISSAGE DE LA MESURE

> Nous croyons que si les élèves comprennent moins aisément les concepts en mesure que les autres idées mathématiques, c'est que l'on tend à mettre l'accent sur l'enseignement de procédures plutôt que sur le développement du sens de la mesure. Notre recherche démontre que l'acquisition du sens de la mesure s'avère plus complexe que l'apprentissage d'habiletés ou de procédures pour déterminer une mesure quelconque (Stephan et Clements, 2003, p. 14, traduction libre, cités dans Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010c, p. 38).

Le domaine Mesure aide les élèves à développer tous les processus mathématiques, notamment le raisonnement spatial, l'établissement de liens et la réflexion. Tel qu'il est mentionné dans l'introduction, en 7e et en 8e année, le domaine Mesure est un domaine en soi. En 9e année, le domaine Géométrie et sens de l'espace et le domaine Mesure ne font qu'un seul domaine, soit Géométrie et mesure, tandis qu'en 10e année, certains concepts du domaine Mesure sont intégrés au domaine Trigonométrie. Cependant, en 7e et en 8e année, l'exploration de la mesure intégrée aux divers concepts géométriques se fait aisément si les activités sont planifiées en conséquence.

LE SENS DE LA MESURE



Dans le domaine Mesure, acquérir le sens de la mesure est l'objectif à atteindre, tout comme développer le sens du nombre est le but visé en numération. Le sens de la mesure comprend les trois composantes suivantes : la compréhension des concepts, la compréhension des relations et la compréhension des procédures. Il existe un lien étroit entre ces trois éléments :

- Les élèves doivent avoir une compréhension conceptuelle des attributs mesurables d'un objet ainsi que des concepts fondamentaux qui donnent un sens aux unités de mesure et à l'acte de mesurer. À l'intermédiaire (de la 7e à la 10e année), les attributs mesurables étudiés sont la longueur, l'aire, le volume et les angles de figures planes et de solides. Les concepts fondamentaux liés à ces attributs sont l'itération, la structure associée aux unités de mesure, la transitivité, la conservation et l'additivité.
- Les élèves doivent pouvoir établir diverses relations entre des unités de mesure conventionnelles ainsi qu'entre des attributs. Elles et ils seront donc capables de déterminer et de comparer les mesures de figures et de solides. L'établissement de ces relations facilitera la formulation de conjectures et de généralisations.
- Les élèves doivent développer une aisance à se servir de diverses procédures liées à l'acte de mesurer qui comprend plusieurs étapes. L'acte de mesurer constitue un ensemble de réflexions, de décisions et d'actions permettant d'obtenir une mesure exacte.

Les apprenantes et apprenants qui débutent au cycle intermédiaire ont déjà acquis un certain bagage en mesure. Elles et ils ont exploré différents attributs mesurables d'objets ainsi que les concepts fondamentaux qui les sous-tendent. Elles et ils ont aussi établi certaines relations entre des mesures conventionnelles et ont développé diverses habiletés à mesurer avec exactitude.

Pour que les élèves approfondissent le sens de la mesure, les activités de résolution de problèmes doivent exiger d'elles et eux d'aller au-delà de l'application de procédures et de l'emploi d'instruments de mesure. Selon le document *Guide d'enseignement efficace des mathématiques*, Mesure, de la 4e à la 6e année (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010c) :

> […] les élèves doivent aussi apprendre à reconnaître et à comprendre le sens des attributs mesurables d'un objet, à estimer leur grandeur et à les mesurer dans divers contextes afin que le vrai sens de la mesure puisse s'ancrer dans leurs expériences d'apprentissage, et qu'il les aide à résoudre divers problèmes de la vie et à prendre des décisions éclairées. (p. 6)

La compréhension des concepts

Les concepts en mesure sont liés aux attributs mesurables d'un objet ainsi qu'aux **cinq concepts fondamentaux** qui les sous-tendent. Les concepts fondamentaux sont importants, puisqu'ils décrivent un élément spécifique de l'attribut mesuré.

> Même si les chercheurs débattent de l'ordre du développement de ces concepts et de l'âge auquel ils sont développés, ils s'entendent pour dire que ces concepts sont le fondement de la mesure et qu'ils doivent être considérés dans tout enseignement de la mesure (Stephan et Clements, 2003, p. 4 et 7, traduction libre, cités dans Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010c, p. 44).

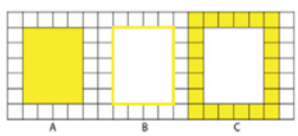
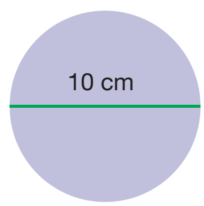
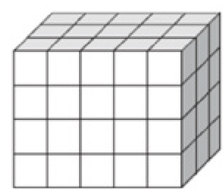
ITÉRATION

L'élève qui comprend le concept d'itération conçoit qu'il est possible de déterminer la mesure de certains attributs d'un objet en plaçant, « […] à plusieurs reprises et d'une manière ordonnée, un même objet étalon ou une même unité de mesure […] » conventionnelle ou non conventionnelle (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010b, p. 48).

LONGUEUR	AIRE	VOLUME	ANGLE
Tu as une bande de papier de 1 dm de long. De quelle façon pourrais-tu utiliser cette bande pour déterminer la hauteur du plafond, en mètres?	Jules veut recouvrir de céramique le plancher de la salle de bain. Il n'a qu'un seul carreau de céramique. Comment peut-il déterminer le nombre de carreaux de céramique dont il a besoin?	Comment estimerais-tu le volume d'une sculpture (boîte) en utilisant un cube Rubik comme unité de mesure et en sachant que chaque arête du cube mesure 4 cm de long?	Détermine la mesure d'un angle en utilisant une seule mosaïque géométrique (losange beige). Explique ta démarche. Détermine la mesure d'un angle en te servant de tes connaissances au sujet des mesures de différents angles.

STRUCTURE ASSOCIÉE AUX UNITÉS DE MESURE DE LONGUEUR, D’AIRE OU DE VOLUME

L’élève qui comprend ce concept conçoit que les unités de mesure d’aire d’un rectangle doivent être juxtaposées dans un espace à deux dimensions, sans espace ni chevauchement, de façon : à recouvrir la distance entre deux extrémités d’un objet (longueur); à recouvrir le rectangle selon une disposition rectangulaire constituée de colonnes et de rangées (aire); à former des dispositions rectangulaires d’unités cubiques et à les superposer en une troisième dimension pour créer un prisme rectangulaire droit (volume). (Adapté de Ministère de l’Éducation de l’Ontario, 2010c, p. 55, 56 et 57. Reproduit avec la permission de l’Imprimeur.)

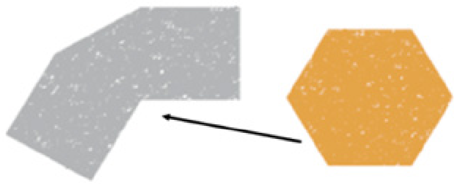
LONGUEUR	AIRE	VOLUME
« Sur laquelle des figures ci-dessous la partie en jaune représente-t-elle le périmètre d’un calepin de 12 cm sur 15 cm, si la largeur et la longueur de chaque petit carré mesurent 3 cm? Pourquoi? » (Ministère de l’Éducation de l’Ontario, 2010e, p. [4])  © Imprimeur de la Reine pour l’Ontario, 2010	Peut-on dire que l’aire du disque ci-dessous est environ $\frac{3}{4}$ de 100 cm^2? Justifie ta réponse.  La longueur d’un côté d’un rectangle est 4 fois sa largeur. Si l’aire du rectangle est de 100 m^2, quelle est la longueur d’un côté?	« Conrad veut déterminer le volume du prisme illustré ci-dessous en considérant la juxtaposition de dispositions rectangulaires formées de cubes. Il pourrait le faire de trois façons différentes. Lesquelles? » (Ministère de l’Éducation de l’Ontario, 2010f, p. [3])  © Imprimeur de la Reine pour l’Ontario, 2010

TRANSITIVITÉ

L'élève qui comprend ce concept peut établir une relation d'égalité ou d'inégalité entre la mesure d'un attribut quelconque de trois objets. Elle ou il compare la mesure d'un attribut d'un objet avec la mesure du même attribut de deux autres objets.

« De façon générale, la transitivité désigne une relation logique d'égalité ou d'inégalité entre trois objets ou plus. Symboliquement, on peut la représenter comme suit :

- Si $a = b$ et $b = c$, alors $a = c$.
- Si $a > b$ et $b > c$, alors $a > c$.» (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010c, p. 47)

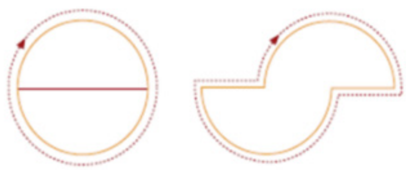
LONGUEUR	AIRE
Si m $\overline{AB}$ est plus grand que m $\overline{CD}$ et que m $\overline{CD}$ est plus grand que m $\overline{EF}$, alors m $\overline{AB}$ est plus grand que m $\overline{EF}$.	Un rectangle, un carré et un trapèze ont une aire identique. Quelle pourrait être la mesure de la base et de la hauteur de chaque figure?
VOLUME	**ANGLE**
Le volume du placard A est plus petit que celui du placard B, et le volume du placard B est plus petit que celui du placard C. Si le volume du placard A est de 56 m³ et que le volume du placard C est de 75 m³, quels seraient des volumes possibles pour le placard B?	« Comment peut-on déterminer, sans déplacer les deux tables ci-dessous, si la table hexagonale peut être placée dans l'ouverture de la table grise? » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010d, p. [2])  © Imprimeur de la Reine pour l'Ontario, 2010

CONSERVATION

L'élève qui comprend ce concept conçoit que dans la plupart des situations, « […] la mesure d'un attribut [quelconque d'un objet] demeure la même que l'objet soit déplacé, transformé ou décomposé » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010c, p. 49. Reproduit avec la permission de l'Imprimeur.).

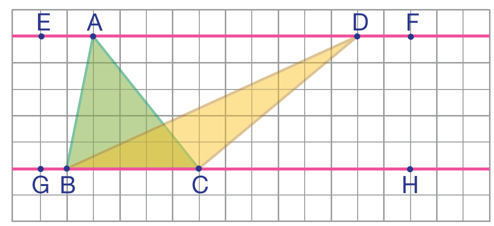
LONGUEUR

« Si je coupe un cercle en deux parties et que je place les deux parties comme ci-dessous, le périmètre de la nouvelle figure est-il égal à la circonférence du cercle? » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010e, p. [3])



AIRE

Les côtés du triangle ABC sont modifiés pour former le triangle DBC. Les deux triangles ont-ils la même aire?

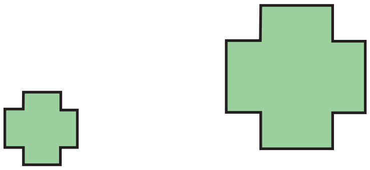


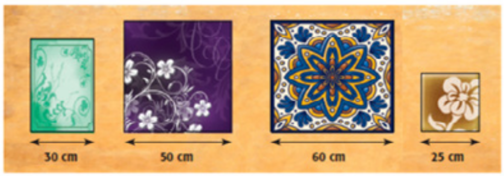
VOLUME

Comment déterminer si les boîtes ci-dessous ont le même volume?

ANGLE

« Stéphanie projette la figure ci-dessous sur un écran et remarque que l'image projetée est deux fois plus grande. Les angles qui apparaissent à l'écran sont-ils deux fois plus grands? Justifie ta réponse. » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010d, p. [3])



<table>
<tr><th colspan="2">ADDITIVITÉ</th></tr>
<tr><td colspan="2">L'élève qui comprend ce concept conçoit que, dans la plupart des situations, « […] la mesure d'un attribut [quelconque] d'un objet est égale à la somme [de la mesure du même attribut de chacune des parties de l'objet] » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010c, p. 52. Reproduit avec la permission de l'Imprimeur.).</td></tr>
<tr><th>LONGUEUR</th><th>AIRE</th></tr>
<tr><td>« Comment les longueurs des bases de ces tableaux peuvent-elles t'aider à estimer la longueur du mur? » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010e, p. [3])


© Imprimeur de la Reine pour l'Ontario, 2010.
Reproduit avec la permission de l'Imprimeur.</td><td>Une figure formée de plusieurs trapèzes a une aire de 100 cm^2. Quelle pourrait être cette figure?</td></tr>
<tr><th>VOLUME</th><th>ANGLE</th></tr>
<tr><td>Un prisme rectangulaire ayant un volume de 1 500 cm^3 est composé d'un certain nombre de pièces de format différent. Karla a trouvé un sac contenant quatre pièces qui ont respectivement un volume de 234 cm^3, de 416 cm^3, de 98 cm^3 et de 585 cm^3. A-t-elle trouvé toutes les pièces?</td><td>Comment la somme des mesures des angles d'un triangle m'aide-t-elle à trouver les mesures des angles intérieurs d'un pentagone?</td></tr>
</table>

La compréhension des relations

L'analyse des relations permet aux élèves de développer leur compréhension des unités de mesure conventionnelles et de diverses formules, ce qui les aide à estimer et à déterminer des mesures. L'exploration de diverses relations telles que les repères, les relations entre des unités de mesure conventionnelles et les relations inverses, favorise chez les élèves le développement du sens de la mesure.

Repères

Selon Joram, citée dans l'article de Thompson et Preston (2004, traduction libre. Copyright © 2019, National Council of Teachers of Mathematics. Measurement in the Middle Grades: Insights from NAEP and TIMSS), « […] sans une base solide de repères, les élèves (et les adultes) ont de la difficulté à faire des estimations et à déterminer la vraisemblance d'une solution » (p. 516).

Les curriculums de mathématiques de l'Ontario (de la 1re à la 8e année et de 9e et de 10e année) font référence à l'estimation. Selon le ministère de l'Éducation de l'Ontario (2010c) :

> En mesure, estimer est un processus fondé sur des renseignements visuels et sur des expériences antérieures qui permet de porter un jugement par rapport à la grandeur approximative d'un attribut quelconque (p. ex., longueur, aire, temps) sans recourir formellement à une stratégie de mesure. (p. 17)

Une stratégie pour estimer consiste à utiliser des repères qui représentent des unités de mesure importantes. Un repère est une image mentale qui est liée à un attribut quelconque.

- Longueur : L'élève peut représenter un centimètre en associant cette mesure à la largeur de son index; elle ou il peut représenter un mètre en associant cette mesure à la largeur d'une porte; elle ou il peut représenter un kilomètre en faisant référence, par exemple, à 2,5 tours d'une piste d'athlétisme.
- Aire : L'élève représente un centimètre carré en se référant à son expérience avec du matériel de manipulation. Elle ou il visualise, par exemple, la face d'un petit cube provenant du matériel de base 10.
- Volume : L'élève peut représenter un centimètre cube en se référant, par exemple, au petit cube provenant du matériel de base 10. Il est préférable qu'elle ou il ne recoure pas aux cubes emboîtables, puisque certains de ces cubes mesurent 2 cm de long; leur volume est donc de 8 cm^3 plutôt que de 1 cm^3. Lorsqu'elle ou il comprend que 1 cm^3 est équivalent à 1 ml, cela l'aide à mieux visualiser cette quantité en l'associant à la capacité d'une bouteille d'eau. Le mètre cube est plus difficile à estimer. L'élève peut représenter un mètre cube en l'associant, par exemple, au volume d'un appareil électroménager, comme une machine à laver.
- Angle : L'élève se sert d'angles repères tels que l'angle droit (90°) et l'angle plat (180°), comme référence pour estimer la mesure d'angles aigus ou d'angles obtus.

(Inspiré de Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010c, p. 14.)

Relations entre des unités de mesure conventionnelles

Il est utile pour les élèves d'explorer les relations entre les unités de mesure conventionnelles, car plusieurs d'entre elles font partie d'un vocabulaire utilisé à l'extérieur de la salle de classe de mathématiques. Si l'enseignante ou l'enseignant demandait à des élèves de nommer des unités de mesure qu'elles et ils connaissent, elle ou il en obtiendrait une liste assez impressionnante avant même de les aborder dans le cours de mathématiques. Même si les apprenantes et apprenants peuvent nommer des unités de mesure usuelles, elles et ils ne conçoivent pas nécessairement qu'il y ait plusieurs relations entre ces unités de mesure; par exemple, la relation entre les préfixes des unités de mesure et les puissances de 10.

Au cycle intermédiaire, les élèves doivent comprendre que le préfixe :

- *milli* placé devant une unité de mesure désigne une mesure équivalant à un millième de cette unité (p. ex., 1 mg = 0,001 g);
- *centi* placé devant une unité de mesure désigne une mesure équivalant à un centième de cette unité (p. ex., 1 cg = 0,01 g);
- *déci* placé devant une unité de mesure désigne une mesure équivalant à un dixième de cette unité (p. ex., 1 dg = 0,1 g);
- *déca* placé devant une unité de mesure désigne une mesure équivalant à 10 fois cette unité (p. ex., 1 dag = 10 g);
- *hecto* placé devant une unité de mesure désigne une mesure équivalant à 100 fois cette unité (p. ex., 1 hg = 100 g);
- kilo placé devant une unité de mesure désigne une mesure équivalant à 1 000 fois cette unité (p. ex., 1 kg = 1 000 g).

(Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010c, p. 67.)

Symboles

mm	millimètre
mg	milligramme
ml	millilitre
cm	centimètre
cg	centigramme
cl	centilitre
dm	décimètre
dg	décigramme
dl	décilitre
m	mètre
g	gramme
l	litre
dam	décamètre
dag	décagramme
dal	décalitre
hm	hectomètre
hg	hectogramme
hl	hectolitre
km	kilomètre
kg	kilogramme
kl	kilolitre

En vue de détecter les difficultés de compréhension qu'ont les élèves au sujet des unités de mesure, l'enseignante ou l'enseignant pourrait les inviter à explorer le tableau de la page suivante. Si les élèves peuvent nommer des unités de mesure usuelles, il n'est pas toujours évident pour elles et eux que plusieurs relations existent entre ces unités de mesure; par exemple, il y a une relation entre les préfixes des unités de mesure et les puissances de 10. Demander aux élèves d'observer le tableau et de discuter de ce qu’elles et ils remarquent et de ce sur quoi elles et ils se posent des questions. Les échanges permettent de détecter les méprises des élèves et sont un moyen de leur faire reconnaître le vocabulaire qu’elles et ils connaissent déjà.

Les relations entre la valeur de position et le système international d’unités (SI)

	10^{12}	10^{9}	10^{6}	10^{3}	10^{2}	10^{1}	Unité de base	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-5}	10^{-9}	10^{-12}
valeur de position	unité de billion	unité de millard	unité de million	unité de mille	centaine	dizaine	unité (un)	dixième	centième	millième	millionième	milliardième	billionième
préfixe	téra (T)	giga (G)	méga (M)	kilo (k)	hecto (h)	déca (da)		déci (d)	centi (c)	milli (m)	micro (µ)	nano (n)	pico (p)
longueur aire volume	téramètre (Tm)	gigamètre (Gm)	mégamètre (Mm)	kilomètre (km)	hectomètre (hm)	décamètre (dam)	mètre (m)	décimètre (dm)	centimètre (cm)	millimètre (mm)	micromètre (µm)	nanomètre (nm)	picomètre (pm)
capacité	téralitre (Tl)	gigalitre (Gl)	mégalitre (Ml)	kilolitre (kl)	hectolitre (hl)	décalitre (dal)	litre (l)	décilitre (dl)	centilitre (cl)	millilitre (ml)	microlitre (µl)	nanolitre (nl)	picolitre (pl)
masse	téragramme (Tg)	gigagramme (Gg)	mégagramme (Mg)	kilogramme (kg)	hectogramme (hg)	décagramme (dag)	gramme (g)	décigramme (dg)	centigramme (cg)	milligramme (mg)	microgramme (µg)	nanogramme (ng)	picogramme (pg)

Les préfixes sont aussi utilisés avec d’autres unités de mesure :
- en informatique (octet)
- puissance énergétique (watt)
- pression (pascal)
- fréquence (hertz)

(Small and Northern Board Learning 2015-2016 – Measurement,
« Session 3 – Units and Scale: Standardized Units (chart) »,
Communauté d’apprentissage Ontario, 2007, traduction libre.
© Imprimeur de la Reine pour l’Ontario, 2007)

Note : Il ne s’agit pas de demander aux élèves d’apprendre du vocabulaire par cœur ou de se servir de ce tableau pour faire une multitude de conversions d’unités de mesure, mais plutôt de les inviter à remarquer des relations et à se familiariser avec l’ordre de grandeur de certaines unités de mesure déjà connues.

Relation inverse

Lorsque les élèves sont en mesure de reconnaître les relations entre les unités de mesure conventionnelles, elles et ils peuvent donc réfléchir au sujet de la relation inverse qui existe entre « le nombre d’unités de mesure nécessaire pour déterminer la mesure d’un objet et la grandeur de cette unité [de mesure] » (Ministère de l’Éducation de l’Ontario, 2010c, p. 59). L’enseignante ou l’enseignant doit s’assurer que les élèves reconnaissent que plus l’unité de mesure est petite, plus le nombre d’unités requis pour déterminer la mesure de l’attribut est grand, et vice-versa; par exemple, une longueur prise en centimètres, comme 230 cm, aura un plus grand nombre d’unités que la même longueur mesurée en mètres, soit 2,30 m.

À ce sujet, Small (2011, traduction libre) dans sa publication portant sur les grandes idées, de la 9e à la 12e année, suggère le problème suivant :

Après avoir converti 6 unités métriques, on a obtenu 0,006 unité métrique. Déterminer de quelles unités de mesure, il pourrait s’agir.

En posant cette question aux élèves et en leur demandant de justifier leur raisonnement, la réponse recherchée est que la relation entre 6 et 0,006 montre que l'unité de mesure utilisée pour obtenir 6 est 1 000 fois plus petite que l'unité de mesure avec laquelle le nombre 0,006 a été obtenu. Néanmoins, il existe une variété de solutions; par exemple, il pourrait s'agir de la conversion de 6 mm en m, de 6 m en km ou de 6 dm en hm.

La compréhension des procédures

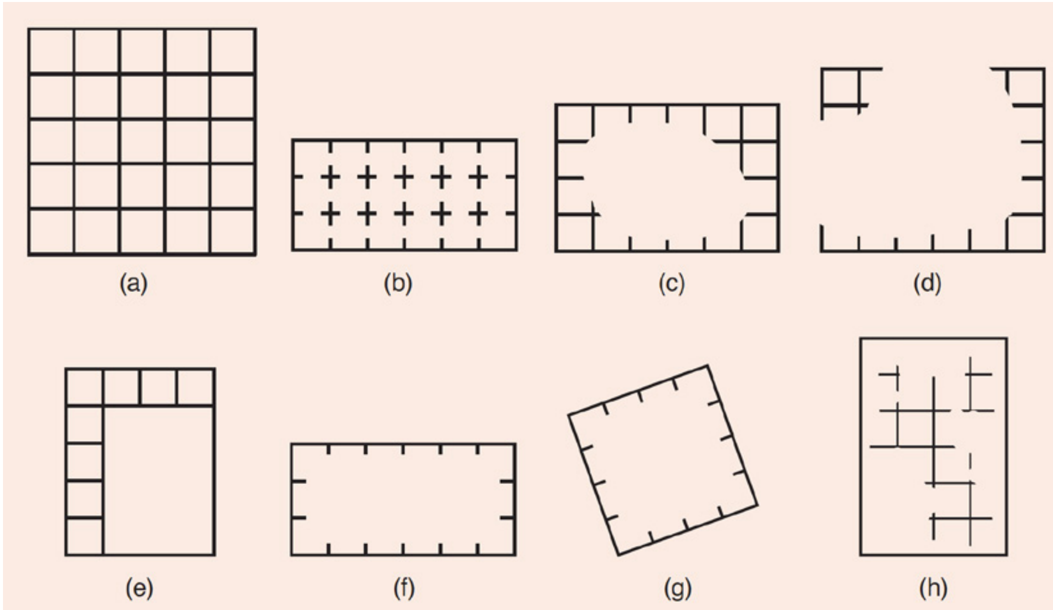
« Bien que le développement du sens de la mesure repose sur la compréhension des concepts et des relations, dans la pratique, cette compréhension s'acquiert par l'utilisation de procédures liées à l'acte de mesurer » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010c, p. 82). « L'acte de mesurer comporte une série de réflexions, de décisions et d'actions qui mènent à l'obtention et à la communication d'une mesure exacte et appropriée à un contexte donné » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010c, p. 83). Elle comprend plusieurs étapes :

- « déterminer l'attribut à mesurer;
- choisir l'unité de mesure;
- déterminer la mesure;
- communiquer le résultat. » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010c, p. 83)

Structures associées aux différents attributs

Les élèves qui arrivent en 7e année ont souvent appris quelques formules et, au moment de résoudre un problème, elles et ils se questionnent sur la bonne formule à utiliser. Pourtant, elles et ils devraient plutôt s'interroger sur l'attribut qui est en jeu. Les élèves doivent bien comprendre ce que chaque attribut représente. Trop souvent, elles et ils associent le volume à la formule ($L \times l \times h$) sans vraiment comprendre ce qui est à mesurer, soit un espace formé de dispositions rectangulaires d'unités cubiques qui sont superposées en une troisième dimension.

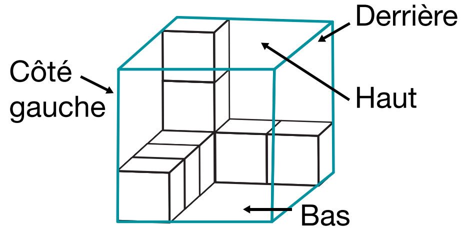
La visualisation spatiale joue un rôle primordial dans la compréhension des structures associées aux différents attributs.

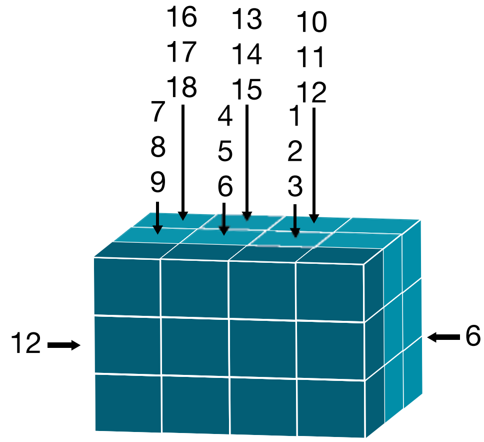


(Illustrations tirées de Small and Northern Board Learning 2015-2016 – Measurement, « Session 2 – Indirect Measurement: Measurement Resources, SNB_Session_2_Slide Deck (FINAL) », *Communauté d'apprentissage Ontario*, p. [24], traduction libre. Source : Michael Battista, « The Importance of Spatial Structuring in Geometric Reasoning » (*Teaching Children Mathematics*, 1999). Copyright © 2019, National Council of Teachers of Mathematics. The Importance of Spatial Structuring in Geometric Reasoning.)

Pour comprendre la structure de l'aire, Battista (1999) propose une progression du niveau de difficulté concernant les figures que doivent visualiser les élèves en vue de les aider à faire des généralisations. Les exemples présentés ci-dessus qui consistent à prédire le nombre de carrés, exigent d'elles et eux une compréhension de plus en plus approfondie des figures à visualiser.

Battista (2004) se sert d'un raisonnement semblable concernant la structure du volume. Le raisonnement présenté ci-dessous est celui de deux élèves qui ont répondu à la question suivante : « Combien de cubes seront nécessaires pour former une boîte si les cubes représentent le début de la construction? »





« Un élève compte les 8 cubes qui sont déjà dans la boîte. Ensuite, il désigne le côté gauche, et compte les 6 cubes qu'il s'imagine manquant. Il ajoute 4 cubes derrière, 4 cubes au bas et 5 cubes au haut de la boîte. »

« Une élève compte les 12 cubes qui sont visibles à l'avant de la boîte. Ensuite, elle compte les 6 autres cubes qui seraient à droite. Elle poursuit en désignant chaque colonne de cubes en arrière et compte les cubes un par un. Elle détermine alors qu'il y en aurait 18. Elle termine en faisant la somme de 12, de 6 et de 18 pour obtenir 36 cubes. »

(Illustrations et texte tirés de Small and Northern Board Learning 2015-2016 – Measurement, « Session 2 – Indirect Measurement: Measurement Resources, SNB_Session_2_Slide Deck (FINAL) », *Communauté d'apprentissage Ontario*, p. [30], traduction libre. Source : Michael Battista, « Applying Cognition-Based Assessment to Elementary School Students' Development of Understanding of Area and Volume Measurement » (*Mathematical Thinking and Learning*, avril, 2004). Mathematical thinking and learning par LAWRENCE ERLBAUM. Tiré du site Web Copyright Clearance Center. Reproduit avec la permission de LAWRENCE ERLBAUM.)

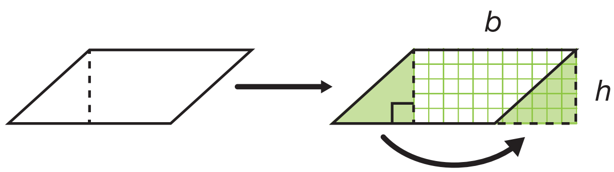
Ces élèves ont des défis en lien avec la visualisation spatiale. Dans le premier cas, l'élève se concentre sur le contour de la boîte et éprouve de la difficulté à déterminer correctement le nombre de cubes composant chacune des faces. Dans le second cas, l'élève a moins de difficulté à dénombrer chaque cube même si elle ne les voit pas. Toutefois, dans les deux cas, les élèves n'utilisent pas l'idée de l'itération d'une unité composée et de la structure de la boîte. Pour ces élèves, utiliser une formule pour calculer le volume risque de devenir une application dépourvue de sens et pour laquelle la compréhension serait précaire.

Généralisation de formules

Il n'est ni pratique ni efficace pour les élèves de compter les unités de mesure qui composent une surface ou un solide. Elles et ils doivent alors développer la capacité de mesurer l'aire de figures et l'aire et le volume de solides de façon symbolique, c'est-à-dire en partant de formules. Les formules, en mesure, prennent tout leur sens lorsque les apprenantes et apprenants maîtrisent les attributs et les concepts fondamentaux qui y sont associés.

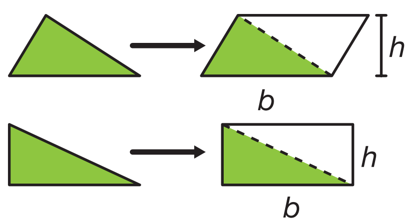
Le raisonnement spatial permet d'établir des relations entre les formules qui s'appliquent aux différentes formes géométriques.

- Si un parallélogramme et un rectangle ont la même base et la même hauteur, alors ils ont la même aire.



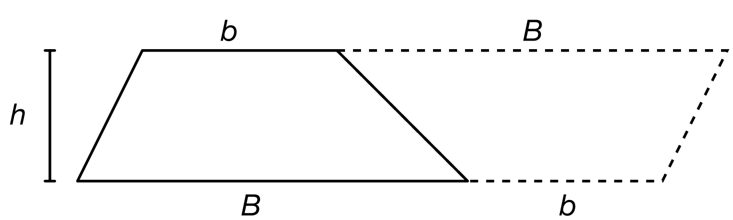
$A = b \times h$

- Si un triangle a la même base et la même hauteur qu'un parallélogramme ou qu'un rectangle, l'aire du triangle est la moitié de l'aire de ces quadrilatères.



$A = \dfrac{b \times h}{2}$

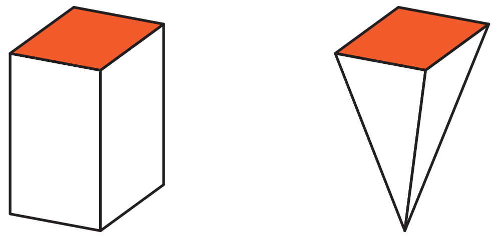
- Deux trapèzes congrus forment un parallélogramme dont l'aire est le double de l'un de ces trapèzes. Par conséquent, l'aire du trapèze est la moitié de l'aire du parallélogramme formé.



$A = \dfrac{(b + B) \times h}{2}$

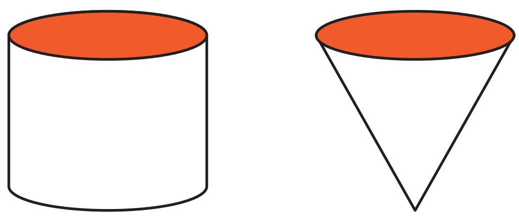
(Les figures mathématiques ci-dessus sont adaptées de Conseil des écoles catholiques du Centre-Est (CECCE) (2010). *Les apprentissages essentiels en numératie 7-9 – Mesure*.)

- Si une pyramide à base rectangulaire a la même base et la même hauteur qu'un prisme droit à base rectangulaire, son volume sera le tiers de celui du prisme.



$$V = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times h$$

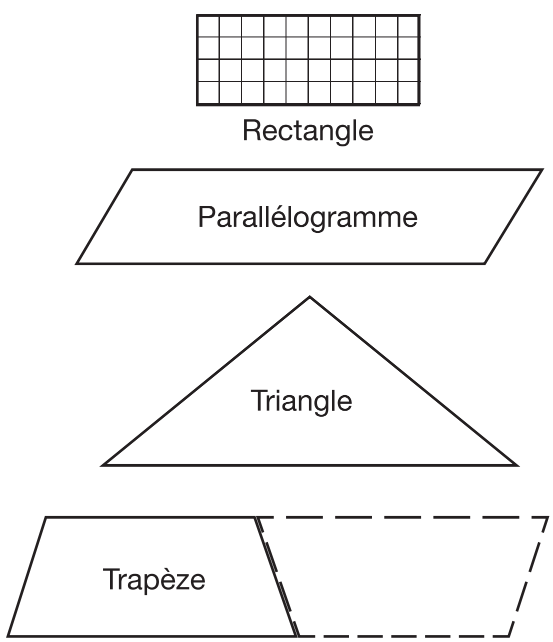
- Si un cône a la même base et la même hauteur qu'un cylindre, son volume sera le tiers de celui du cylindre.



$$V = \frac{1}{3} A_{\text{base}} \times h$$

La relation entre la base et la hauteur de figures ou de solides est sous-jacente à toutes les formules pour déterminer l'aire ou le volume de figures et de solides composées d'une itération d'étages. Il s'agit d'une façon organisée de comptabiliser le nombre d'unités carrées ou d'unités cubiques.

(Les figures mathématiques ci-dessus sont adaptées de Conseil des écoles catholiques du Centre-Est (CECCE) (2010). *Les apprentissages essentiels en numératie 7-9 – Mesure*.)



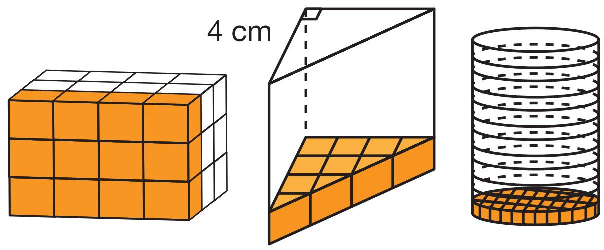
Aire = base × hauteur

Aire = base × hauteur

$$\text{Aire} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$$

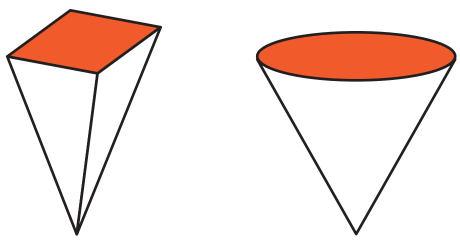
Aire = moyenne des bases × hauteur

$$A = \frac{(b + B) \times h}{2}$$



Volume = Aire de la base × hauteur

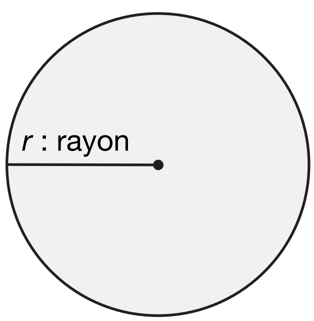
Prismes et cylindres



$$\text{Volume} = \frac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$

(Les figures mathématiques ci-dessus, à l'exception du prisme à base rectangulaire, sont adaptées de Conseil des écoles catholiques du Centre-Est (CECCE) (2010). *Les apprentissages essentiels en numératie 7-9 – Mesure*.)

Cônes et pyramides



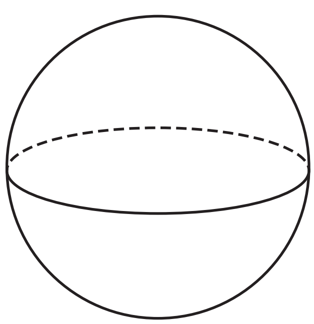
$\pi = 3,1416$

Circonférence d'un cercle = π × diamètre

$C = \pi d$

Aire d'un disque = π × rayon^2

$A_{\text{disque}} = \pi r^2$



$\text{Aire}_{\text{sphère}} = 4 \times \pi \times \text{rayon}^2$

$A_{\text{sphère}} = 4\pi r^2$

$$\text{Volume}_{\text{sphère}} = \frac{4 \times \pi \times \text{rayon}^3}{3}$$

$$V_{\text{sphère}} = \frac{4\pi r^3}{3}$$

Cercle et sphère

LA MESURE ET LA GÉOMÉTRIE

> Pour assurer un apprentissage en mesure, il est primordial d'établir des liens avec les concepts géométriques. La géométrie décrit des formes à deux et à trois dimensions, des êtres vivants et des objets inanimés que l'on peut mesurer. Puisqu'il existe de nombreuses relations entre le domaine de la géométrie et celui de la mesure, une bonne compréhension en géométrie influence la compréhension en mesure, et vice-versa (Florida Department of Education, 2011, traduction libre. © Florida Department of Education, 2019. Relating Geometry to Measurement – Tous droits réservés.).

La mesure et la géométrie sont au cœur de nos activités journalières et, par le fait même, elles nous aident à comprendre le monde qui nous entoure. L'observation et la description d'un objet nécessitent de maîtriser des concepts liés à ces deux domaines. Les applications de la mesure en géométrie sont nombreuses et variées, que ce soit pour expliquer la forme d'une bulle de savon, déterminer la popularité d'une page Web ou estimer la population dans certaines circonscriptions. Mesurer implique de rendre explicite les conjectures formulées au moment de la résolution de problèmes; par exemple, pour déterminer l'importance d'une page Web, il suffit de se fier au nombre de liens associés à d'autres pages Web.

L'utilisation de mesures en géométrie aide à déterminer une longueur, une aire ou un volume inconnu en se servant de mesures connues de représentations de figures à deux et à trois dimensions. Les mesures peuvent être calculées à partir d'attributs tels que la longueur des côtés, l'aire des faces ou les coordonnées d'une figure dans un plan cartésien.

- Pour construire et mesurer le périmètre ou l'aire de figures planes complexes (composées), les élèves doivent avoir l'occasion de décomposer des figures ou de réorganiser les parties de figures en d'autres figures simples telles que des cercles, des polygones ou d'autres figures.
- Pour calculer le périmètre, l'aire ou le volume de solides, les élèves doivent réaliser des activités leur permettant de décomposer des solides et de les réorganiser en construisant des sphères, des cônes, des pyramides ou des prismes et même en assemblant autrement des parties de solides. Des activités d'estimation de mesures de solides fournissent aux élèves une stratégie utile pour calculer les dimensions de solides irréguliers.

Exemples

« Le volume du prisme A est le même que celui du prisme B, car si on décompose le prisme A en deux prismes identiques et qu'on les superpose, on obtient le prisme B » (Ministère de l'Éducation de l'Ontario, 2010c, p. 136).

En somme, certains concepts essentiels appuient l'apprentissage de la mesure intégrée à la géométrie.

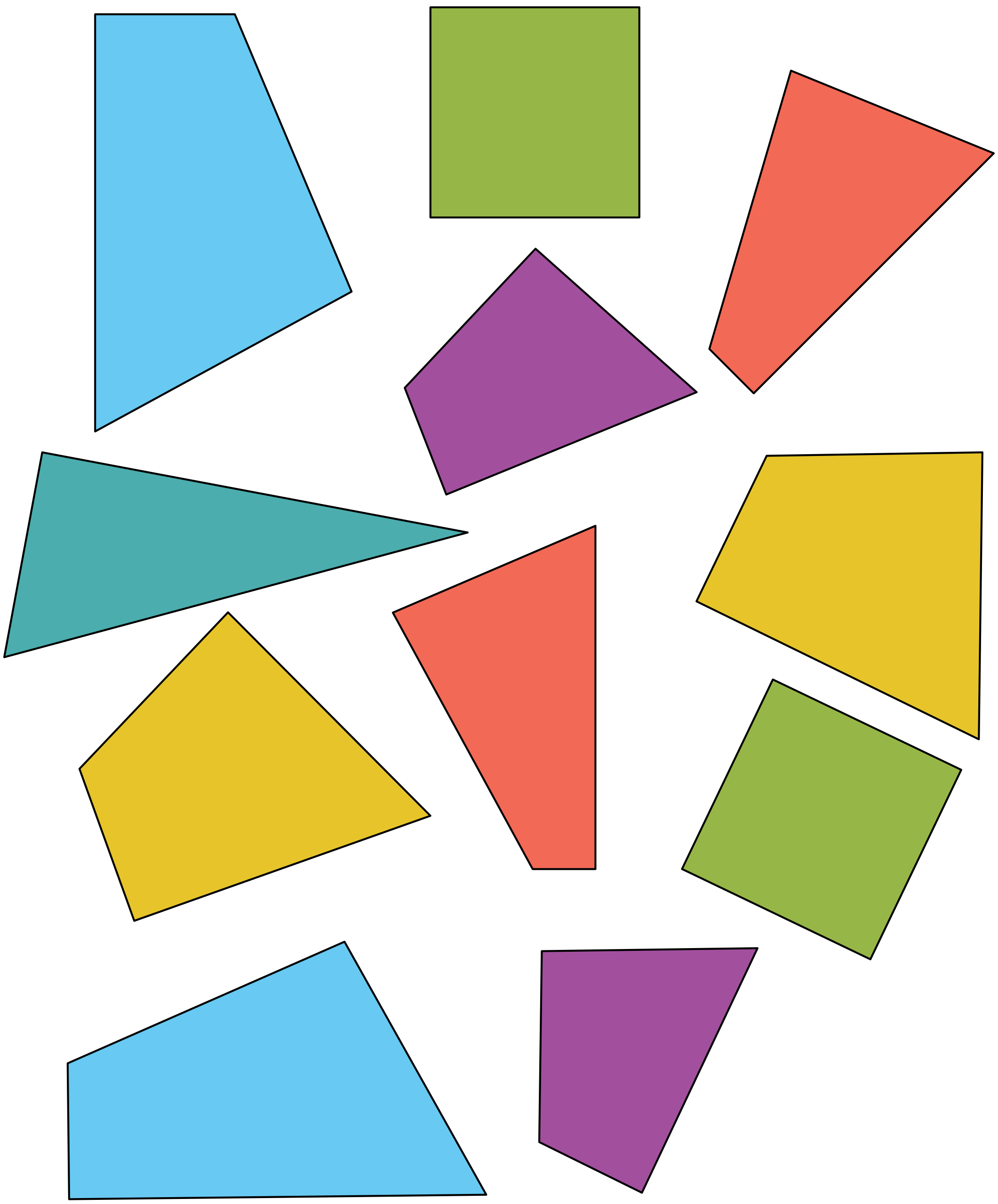
- Calculer l'aire et le volume d'une forme géométrique en la décomposant en formes géométriques plus simples ou en réorganisant ses parties.
- Estimer des mesures à l'aide de différents outils, y compris la technologie, appuie le développement du sens de la mesure.
- Calculer le périmètre, l'aire ou le volume de l'image d'une figure connue à la suite d'une transformation, en utilisant des rapports et des proportions.

(National Council of Teachers of Mathematics, 2018, traduction libre, p. 69. Copyright © 2019, National Council of Teachers of Mathematics. Catalyzing Change in High School Mathematics: Initiating Critical Conversations.)

ANNEXES

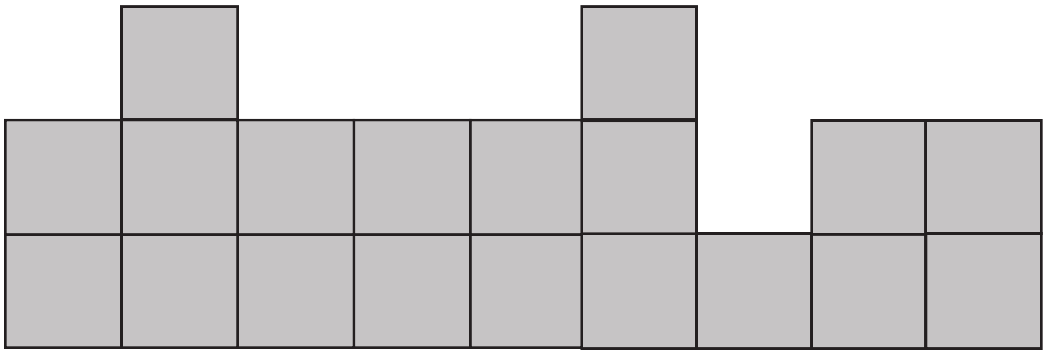
Annexes

CASSE-TÊTE

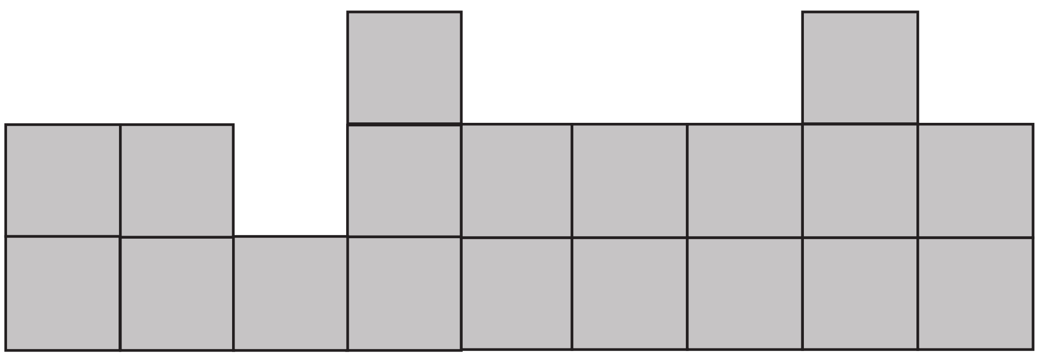


MONUMENT (VUES DES CÔTÉS EST ET OUEST)

Vue du côté est



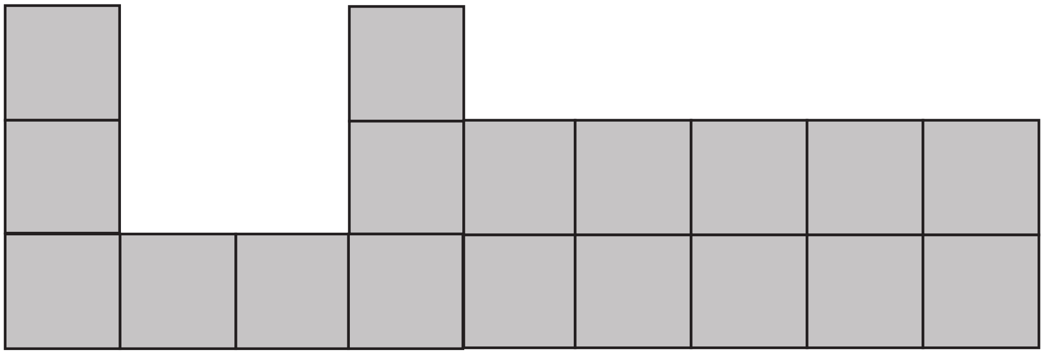
Vue du côté ouest



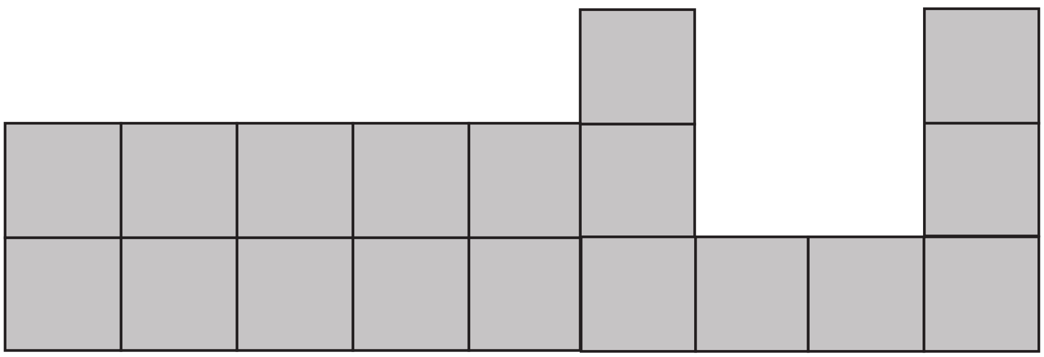
(Illustrations : © Imprimeur de la Reine pour l'Ontario, 2006. Reproduit avec la permission de l'Imprimeur.)

MONUMENT (VUES DES CÔTÉS NORD ET SUD)

Vue du côté nord



Vue du côté sud



(Illustrations : © Imprimeur de la Reine pour l'Ontario, 2006. Reproduit avec la permission de l'Imprimeur.)

ENSEMBLE DE QUADRILATÈRES

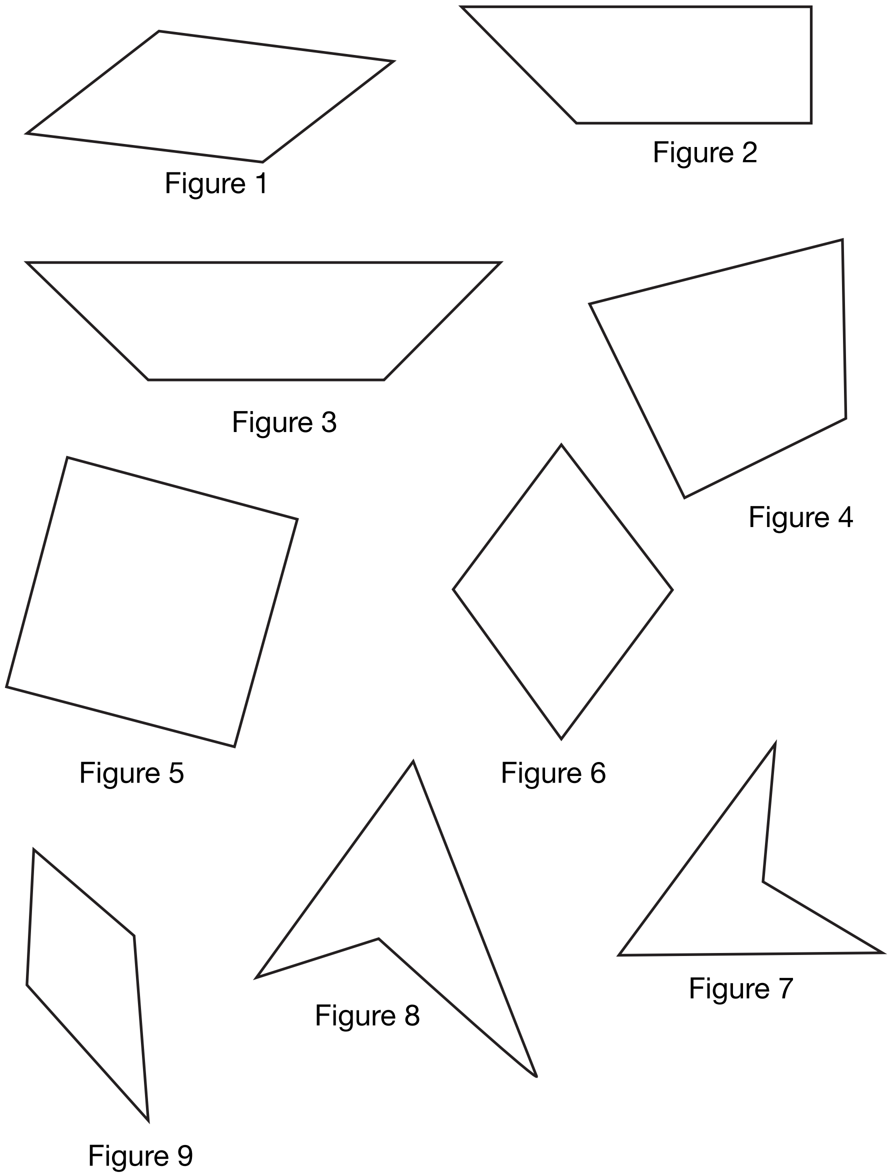


TABLEAU DES OBSERVATIONS

FIGURE	NOM ET CARACTÉRISTIQUES DU QUADRILATÈRE	DIAGONALE	MILIEUX DES CÔTÉS
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			

Annexe 5

ENSEMBLE DE TRIANGLES

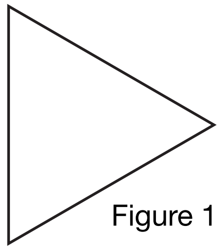


Figure 1

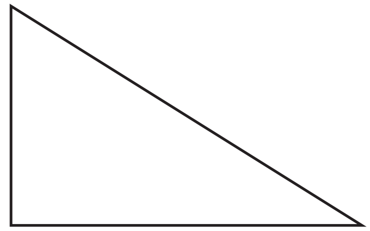


Figure 2

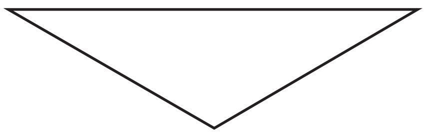


Figure 3

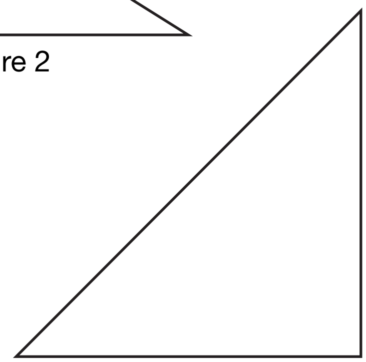


Figure 4

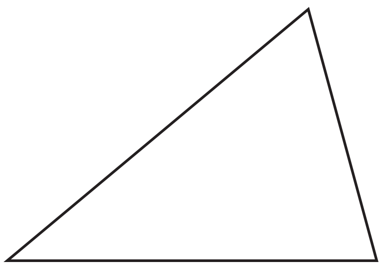


Figure 5

TABLEAU DES OBSERVATIONS

FIGURE	CARACTÉRISTIQUES DU TRIANGLE	VÉRIFICATION DE L'ÉNONCÉ	ARGUMENTS
1			
2			
3			
4			
5			

BIBLIOGRAPHIE

ASSOCIATION FRANCOPHONE POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES EN ONTARIO (collab.) (2018). « Techno 2.0 – Mindstorms EV-3 », *L'InforMATHheur*, Ottawa, AFEMO, nº 14, mars, p. 13-14.

BATTISTA, Michael (1999). « The Importance of Spatial Structuring in Geometric Reasoning », *Teaching Children Mathematics*, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, novembre, vol. 6, nº 3, p. 175.

BATTISTA, Michael T. (2004). « Applying Cognition-Based Assessment to Elementary Scholl Students' Development of Understanding of Area and Volume Measurement », *Mathematical Thinking and Learning*, Londre, Lawrence Erlbaum, Taylor and Francis Online, avril, vol. 6, nº 2, p. 185-204.

BOURASSA, Mary (2013). *Which One Doesn't Belong*, [En ligne], Sitename.com. [http://www.wodb.ca/]

BRACONNE-MICHOUX, Annette (2014). « Les niveaux de pensée en géométrie de van Hiele : de la théorie à l'épreuve de la classe », *Bulletin AMQ*, Montréal, Association mathématique du Québec, vol. LIV, nº 1, mars, p. 24-51. [https://www.amq.math.ca/bulletin/articles/vol54no01p24/]

CONSEIL DES ÉCOLES CATHOLIQUES DU CENTRE-EST (2010). *Les apprentissages essentiels en numératie 7-9 – Mesure*, [Ébauche]. (Note : Ce document a été utilisé avec la permission de l'auteur, mais il n'est pas disponible pour consultation ou autre.)

DEL GRANDE, John J. (1990). « Spatial Sense », *The Arithmetic Teacher*, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, février, vol. 37, nº 6, p. 14-20.

DOUGHERTY, Barbara J., et Linda VENENCIANO (2007). « Measure Up for Understanding: Reflect and Discuss », *Teaching Children Mathematics*, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, mai, vol. 13, nº 9, p. 452.

EduGAINS. *Posters for Mathematical Processes*, [En ligne]. [http://www.edugains.ca/newsite/math/mathprocesses.html]

FLORIDA DEPARTMENT OF EDUCATION (2011). « Mathematics, Section 4: Measurement – Relating Geometry to Measurement », *Elementary K-6 – Online Content Review Module*, Florida Department of Education. [http://www.fl-pda.org/independent/courses/elementary/math/section4/4a.htm]

MEYER, Dan, et Buzzmath ([s. d.]). *Graphing Stories*. [http://www.graphingstories.com]

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DE L'ONTARIO (2005a). *Le curriculum de l'Ontario, de la 1re à la 8e année – Mathématiques (révisé)*, [En ligne], Toronto, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario. [http://www.edu.gov.on.ca/fre/curriculum/elementary/math18curr.pdf]

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DE L'ONTARIO (2005b). *Le curriculum de l'Ontario, 9e et 10e année – Mathématiques (révisé)*, [En ligne], Toronto, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario. [http://www.edu.gov.on.ca/fre/curriculum/secondary/math910curr.pdf]

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DE L'ONTARIO (2006). *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 4e à la 6e année*, Géométrie et sens de l'espace, Fascicule 1 : Formes géométriques, [En ligne], Toronto, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario. [http ://www.atelier.on.ca/edu/resources/guides/GEE_math_4-5-6_GSE_fasc1.pdf]

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DE L'ONTARIO (2010a). *Faire croître le succès – Évaluation et communication du rendement des élèves fréquentant les écoles de l'Ontario*, 1re-12e année, 1re édition, [En ligne], Toronto, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario. [http://www.edu.gov.on.ca/fre/policyfunding/growSuccessfr.pdf]

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DE L'ONTARIO (2010b). *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la maternelle à la 3e année*, Mesure, [En ligne], Toronto, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario. [http://www.atelier.on.ca/edu/resources/guides/gee_math_m_3_mesure.pdf]

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DE L'ONTARIO (2010c). *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 4e à la 6e année*, Mesure, [En ligne], Toronto, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario. [http://atelier.on.ca/edu/resources/guides/GEE_math_4-5-6_Mesure.pdf]

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DE L'ONTARIO (2010d). *Attribut angle – Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 4e à la 6e année*, Mesure (fiche), [En ligne], Toronto, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario. [http ://apprendreenseignerinnover.ca/wp-content/uploads/2017/03/Mesure-Attribut-angle.pdf]

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DE L'ONTARIO (2010e). *Attribut longueur – Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 4e à la 6e année*, Mesure (fiche), [En ligne], Toronto, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario. [http://apprendreenseignerinnover.ca/wp-content/uploads/2017/03/Mesure-Attribut-longueur.pdf]

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DE L'ONTARIO (2010f). *Attribut volume – Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 4e à la 6e année*, Mesure (fiche), [En ligne], Toronto, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario. [http://apprendreenseignerinnover.ca/wp-content/uploads/2017/03/Mesure-Attribut-volume.pdf]

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DE L'ONTARIO (2011). *Mettre l'accent sur l'enseignement des mathématiques M-12*, [En ligne], Toronto, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario. [http://www.edu.gov.on.ca/fre/teachers/studentsuccess/FoundationPrincipalsFr.pdf]

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION DE L'ONTARIO (2014). *Mettre l'accent sur le raisonnement spatial M-12*, [En ligne], Toronto, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario. [http://www.edu.gov.on.ca/fre/literacynumeracy/SpatialReasoningFr.pdf]

MYRHLINE (2017). « Le raisonnement spatial : un atout souvent ignoré », *myRHline*, [En ligne], 19 septembre 2017, © DESIGNRH 2017. [https://www.myrhline.com/actualite-rh/raisonnement-spatial-atout-souvent-ignore.html]
Article paru également sur le site Web Central Test – L'art de l'évaluation, [En ligne], Central Test, 21 septembre 2017. [https://www.centraltest.fr/article/Le-raisonnement-spatial-un-atout-souvent-ignore]

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2018). *Catalyzing Change in High School Mathematics: Initiating Critical Conversations*, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics.

NOBLE, Jim, Oliver BOWLES et Richard WADE (2018). « Activities – Geometry and Measure », *teachMathematics*, [En ligne]. [https://www.teachmathematics.net/page/2999/activities]

PICCIOTTO, Henri ([s. d.]). « Pattern Blocks », *Henri Picciotto's Math Education Page*, [En ligne].
[https://www.mathedpage.org/manipulatives/pattern-blocks/]

SMALL, Marian (2011). *Big Ideas From Dr. Small: Creating a Comfort Zone for Teaching Mathematics, Grade 9-12*, Toronto, Nelson Education.

SMALL AND NORTHERN BOARD LEARNING 2015-2016 – MEASUREMENT. *Communauté d'apprentissage Ontario*, [En ligne], Toronto, Gouvernement de l'Ontario, © Imprimeur de la Reine pour l'Ontario, 2007.
[https://communaute.apprentissageelectroniqueontario.ca/d2l/loginh/index-fr.html]

THOMPSON, Tony D., et Ronald V. PRESTON (2004). « Measurement in the Middle Grades: Insights from NAEP and TIMSS », *Mathematics Teaching in the Middle School*, Reston (VA), National Council of Teachers of Mathematics, vol. 9, n° 9, mai, p. 514-519.

VAN DE WALLE, John A., et LouAnn H. LOVIN (2008). *L'enseignement des mathématiques – L'élève au centre de son apprentissage*, tome 2, Montréal, ERPI, ISBN 978-2-7613-2342-0.