RÉDUCTION DES ÉCARTS DE RENDEMENT

9e année

Module 9 : Aire et volume de solides

Guide de l'élève

Module 9

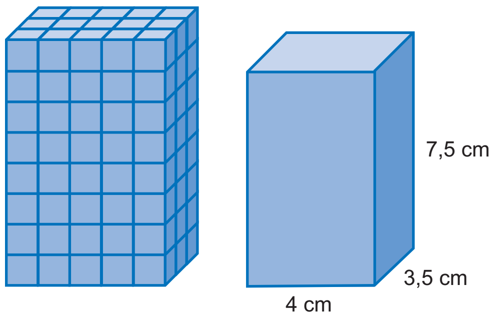
Aire et volume de solides

Évaluation diagnostique

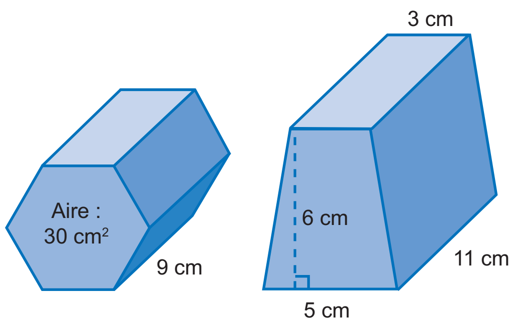
Note : Pour toute réponse faisant appel au nombre π, tu peux donner la valeur exacte exprimée en termes de π ou une valeur approximative calculée en fonction de la valeur de π arrondie à 3,14.

1. Quel prisme a le plus grand volume? De combien est-il plus grand? Montre ton travail.

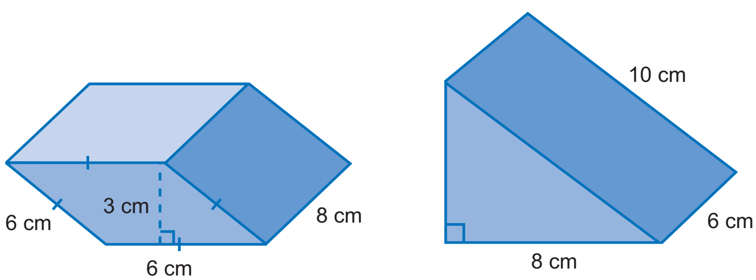
a)



b)



c)

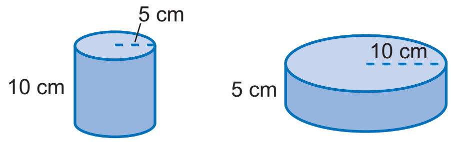


2. Donne un exemple de deux prismes qui ont le même volume, mais qui ont des bases de formes différentes.

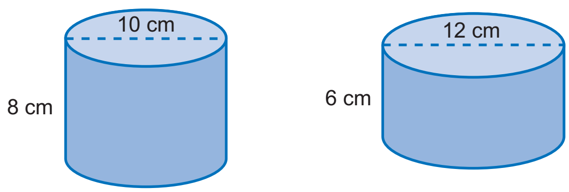
3. Le volume d'un prisme est de 100 cm^3 et sa hauteur est de 4 cm. Quelle autre mesure du prisme peut-on déduire de ces données?

4. Quel cylindre a le plus grand volume? De combien de cm³ est-il plus grand? Montre ton travail.

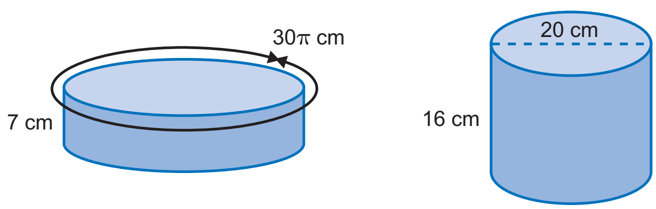
a)



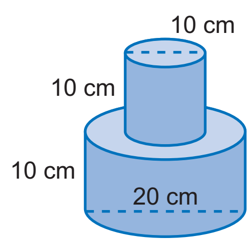
b)



c)

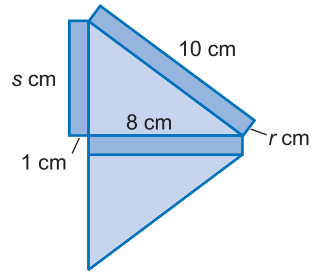


5. Quel est le volume de ce solide?



6. Deux cylindres ont la même hauteur et le même volume. Est-il possible que les bases aient des aires différentes? Explique ta réponse.

7. Voici le développement d'un prisme à base triangulaire.



a) Quelle est la valeur de *r*?

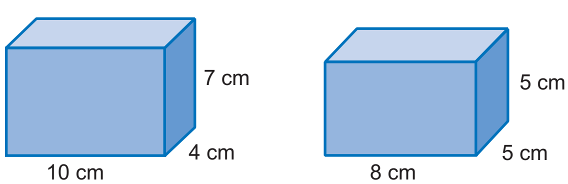
b) Quelle est la valeur de *s*?

c) Quelle est l'aire du prisme, c'est-à-dire l'aire totale de toutes ses faces?

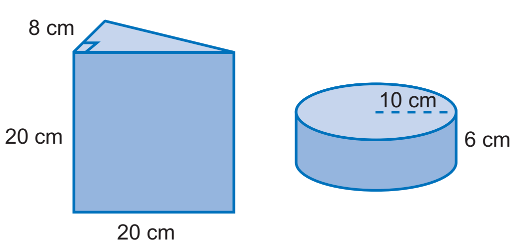
8. L'aire d'un cube est égale à 300 cm^2. Détermine la mesure de ses côtés au dixième près.

9. Quel solide a la plus grande aire? De combien de cm^2 est-elle plus grande? Montre ton travail.

a)



b)

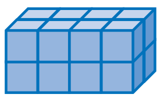


Volume de prismes

Question ouverte

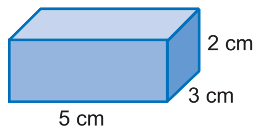
- Explique de quelle façon on a pu obtenir le volume de chacun des prismes suivants.

a)



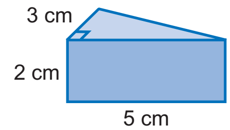
$V = 16\ \text{cm}^3$

b)



$V = 30\ \text{cm}^3$

c)



$V = 15\ \text{cm}^3$

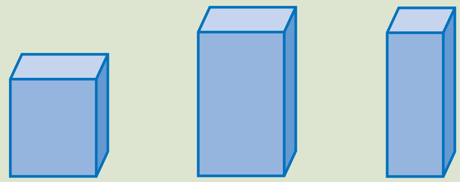
- Choisis un volume.

- Crée un ensemble de trois prismes, chacun ayant ce volume, mais ayant des bases de formes différentes et des hauteurs différentes. Explique ta démarche.

- Répète l'activité précédente en utilisant un autre volume et d'autres types de solides.

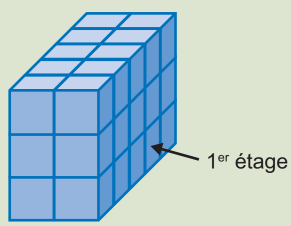
Fiche de réflexion

Le **volume** d'un solide est une mesure qui indique la grandeur de l'espace occupé par ce solide. On peut, par exemple, vouloir connaître le volume d'un solide afin de déterminer le coût en matériaux pour le fabriquer.



Plus grand volume

- Parmi les 3 prismes ci-dessus, celui du milieu a le plus grand volume. Il a un volume supérieur au prisme de gauche puisqu'il est plus haut, alors que les 2 prismes ont la même base. Il a aussi un volume supérieur au prisme de droite puisqu'il a une plus grande base, alors que les 2 prismes ont la même hauteur.
- On peut mesurer le volume d'un prisme à base rectangulaire en déterminant le nombre de cubes de 1 cm^3 qu'il faudrait pour le construire. Par exemple, le prisme ci-dessous a un volume de 30 cubes (ou 30 cm^3), puisqu'il est composé de 3 étages de 10 cubes (5 × 2) chacun.

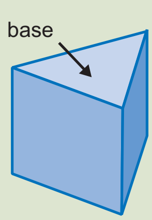


Si le prisme était plus haut, il aurait un plus grand volume. Par exemple, si le cube était composé de 6 étages au lieu de 3, il aurait alors un volume de 60 cubes (6 × 10).

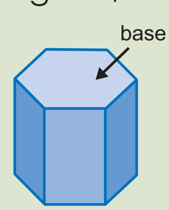
La formule pour déterminer le volume (*V*) d'un prisme à base rectangulaire de hauteur *h* est :

$$V = (Aire\ de\ la\ base) \times hauteur \text{ ou } V = A_{base} \times h.$$

- Il est important de se rappeler que la base d'un prisme est la face qui est utilisée pour nommer le prisme. Ainsi, la base peut être un carré, un rectangle, un triangle, un trapèze, un hexagone, un octogone, etc.

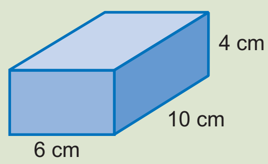


prisme à base triangulaire

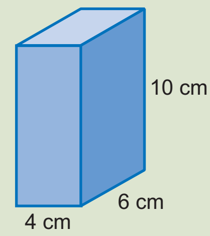


prisme à base hexagonale

- Dans le cas de prismes à base rectangulaire, n'importe quelle face peut être utilisée comme base. Par exemple, le prisme ci-dessous a un volume de 240 cm^3, peu importe la face qui est utilisée comme base.



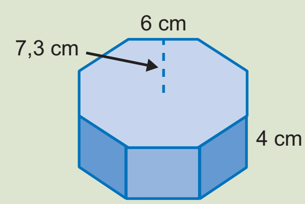
V = 60 cm^2 × 4 cm = 240 cm^3



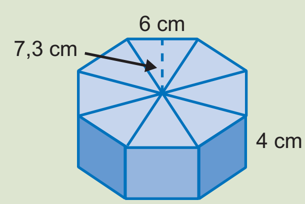
V = 24 cm^2 × 10 cm = 240 cm^3

- Tous les prismes occupent un espace dont la grandeur dépend de l'aire de leur base, ainsi que de leur hauteur. La formule $V = A_{base} \times h$ permet donc de déterminer le volume de n'importe quel prisme.

  Prenons, par exemple, le prisme ci-contre dont la base est un octogone régulier (tous les côtés de l'octogone sont égaux). On note que les côtés de cette base mesurent 6 cm, que la distance entre le centre de la base et le milieu d'un côté mesure 7,3 cm, et que la hauteur du prisme mesure 4 cm.



  Pour déterminer l'aire de la base du prisme, soit l'aire de l'octogone, on peut d'abord subdiviser la base en 8 triangles équilatéraux. Puisque chaque triangle a une base de 6 cm et une hauteur de 7,3 cm, l'aire de chacun est de 21,9 cm^2 $\left(\frac{1}{2} \times 6 \times 7{,}3\right)$.

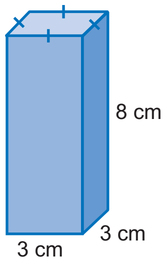


  L'aire de la base du prisme mesure donc 175,2 cm^2 (8 × 21,9). On peut alors déterminer que le volume du prisme est égal à 700,8 cm^3 (175,2 × 4).

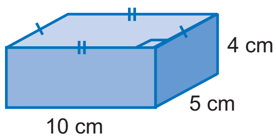
Note : Dans la formule pour déterminer le volume d'un prisme, *h* représente la hauteur du prisme. Il ne faut pas confondre cette hauteur avec la hauteur, par exemple, des triangles équilatéraux qui forment la base octogonale du prisme ci-dessus.

1. Détermine l'aire de la base de chacun des prismes.

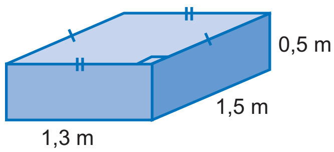
a)



b)



c)



2. Détermine le volume de chaque prisme de la question 1.

a)

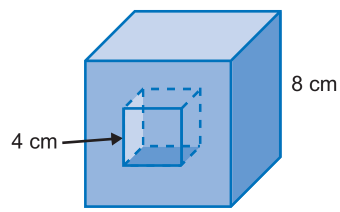
b)

c)

3. Dessine 3 prismes à base rectangulaire différents ayant chacun un volume de 60 cm^3. Indique les dimensions de chaque prisme (longueur, largeur et hauteur).

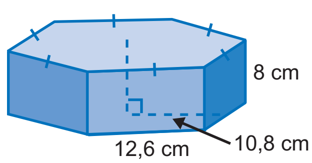
4. Les mesures de la largeur et de la hauteur d'un prisme à base rectangulaire sont beaucoup plus petites que la mesure de la longueur. Si le prisme a un volume de 50 cm^3, quelles pourraient être ses dimensions?

5. Les côtés d'un cube mesurent 8 cm. Sur la face avant du cube, il y a un creux en forme de cube dont les côtés mesurent 4 cm. Quel est le volume de ce solide?

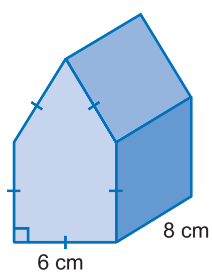


6. Détermine l'aire de la base de chacun des prismes. Montre ton travail.

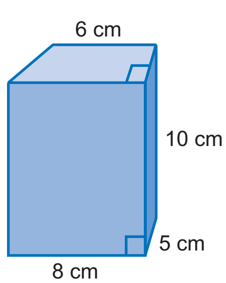
a)



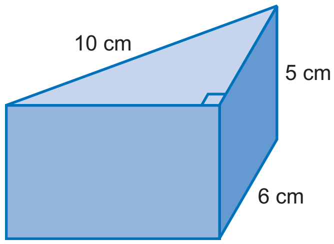
b)



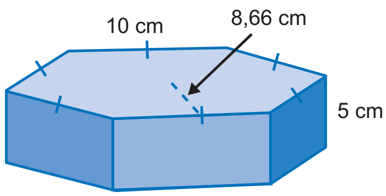
c)



d)



e)



7. Détermine le volume de chaque prisme de la question 6.

a)

b)

c)

d)

e)

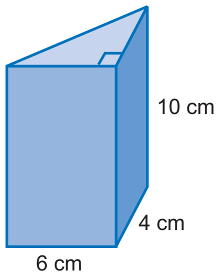
8. Dans chacun des cas suivants, on décrit comment on modifie quelque peu le prisme donné à la question 6 c) pour créer un nouveau prisme. Compare le volume de chaque nouveau prisme au volume du prisme initial.

a) On conserve la base du prisme, mais on double sa hauteur.

b) On conserve la hauteur du prisme, mais on double la mesure de chacun des côtés de sa base.

c) On réduit de moitié la hauteur du prisme et on double la mesure de chacun des côtés de sa base.

9. Un prisme à base triangulaire a le même volume que le prisme ci-dessous, mais ses dimensions sont différentes. Indique quelles pourraient être ses dimensions.

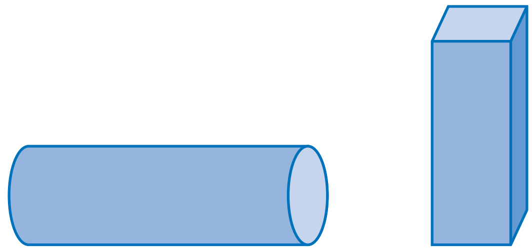


10. Jacob dit que si l'aire de la base d'un prisme est de 20 cm^2, son volume pourrait être de 40 cm^3 ou de 80 cm^3, mais pas de 90 cm^3. Es-tu d'accord avec cette affirmation? Justifie ta réponse.

Volume de cylindres

Question ouverte

Un très haut cylindre a le même volume qu'un prisme à base rectangulaire.



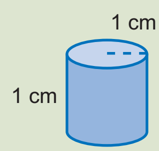
- Choisis trois volumes possibles. Pour chacun, décris les dimensions d'un cylindre et d'un prisme à base rectangulaire ayant ce même volume. Explique ta démarche.

Note : Pour toute réponse faisant appel au nombre π, tu peux donner la valeur exacte exprimée en termes de π ou une valeur approximative calculée en fonction de la valeur de π arrondie à 3,14.

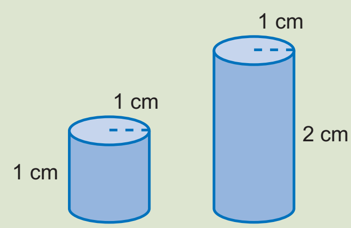
Fiche de réflexion

Un cylindre ressemble beaucoup à un prisme, sauf que sa base a la forme d'un cercle. Il est donc logique que l'on puisse déterminer le volume d'un cylindre de la même façon que l'on détermine le volume d'un prisme, c'est-à-dire en multipliant l'aire de la base par la hauteur.

Prenons, par exemple, un cylindre qui a une hauteur de 1 cm et un rayon de 1 cm. L'aire de sa base est alors égale à π cm^2 ($\pi \times 1^2$). En multipliant l'aire de la base (π cm^2) par la hauteur (1 cm), on obtient le volume du cylindre, soit π cm^3.



Si le cylindre était deux fois plus haut, cela reviendrait à empiler deux des cylindres précédents l'un sur l'autre. Le volume du cylindre ainsi obtenu serait donc le double du volume initial.

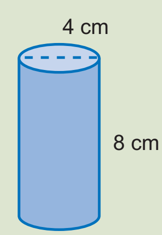


La formule pour déterminer le volume (V) d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est :

$$V = A_{base} \times h \text{ ou } V = \pi r^2 h.$$

On constate que pour déterminer le volume d'un cylindre, on doit connaître deux valeurs, soit les valeurs de r et de h. Cependant, il est parfois possible de déterminer le volume d'un cylindre si l'on connaît certaines autres dimensions.

Par exemple, si l'on connaît la hauteur et le diamètre (d) d'un cylindre, on peut diviser le diamètre par 2 pour obtenir le rayon, puis appliquer la formule pour déterminer le volume.



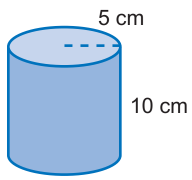
Puisque d = 4 cm, alors r = 2 cm.
Donc $V = 32\pi$ cm^3 ($\pi \times 2^2 \times 8$) ou 100,48 cm^3.

Si l'on connaît la hauteur et la circonférence (C) d'un cylindre, il est possible aussi de déterminer son volume. Il suffit d'abord d'utiliser la formule $C = 2\pi r$ pour déterminer le rayon. Par exemple, si C = 30 cm, alors $r = \frac{15}{\pi}$ cm ou 4,78 cm. On peut ensuite déterminer le volume en appliquant la formule $V = \pi r^2 h$.

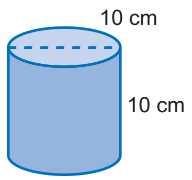
Note : Pour toute réponse faisant appel au nombre π, tu peux donner la valeur exacte exprimée en termes de π ou une valeur approximative calculée en fonction de la valeur de π arrondie à 3,14.

1. Détermine le volume de chacun des cylindres.

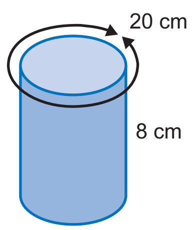
a)



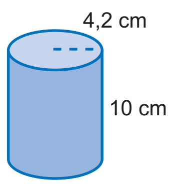
b)



c)



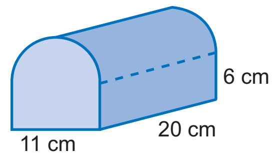
d)



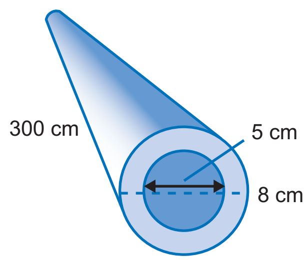
2. Pourquoi est-il vraisemblable que le volume du cylindre à la question 1d) soit inférieur au volume du cylindre à la question 1a)?

3. Les volumes de trois cylindres différents mesurent chacun 300π cm^3 (ou 942 cm^3). Quelles pourraient être leurs dimensions?

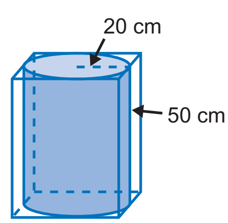
4. La partie supérieure de chaque extrémité du pain ci-dessous a la forme d'un demi-cercle. Détermine le volume du pain. Montre ton travail.



5. Un tuyau mesurant 300 cm de long a un diamètre extérieur de 8 cm et un diamètre intérieur de 5 cm. Quel volume de matériau faut-il pour le fabriquer? Montre ton travail.



6. Détermine le volume intérieur de la plus petite boîte en forme de prisme à base carrée dans laquelle on peut insérer le cylindre ci-dessous.



7. Une feuille de papier mesure 22 cm sur 29 cm. Tu enroules la feuille dans le sens de la longueur de façon à obtenir une forme cylindrique, ouverte à chaque extrémité. Puis, tu enroules dans le sens de la largeur une autre feuille de papier ayant ces mêmes dimensions, de façon à obtenir une forme cylindrique moins haute que la précédente. Ces deux formes cylindriques ont-elles le même volume intérieur? Justifie ta réponse.

8. Un cube et un cylindre ont chacun un volume de 64 cm^3. Quelles pourraient être les dimensions de chaque solide?

9. La mesure du diamètre d'un cylindre est égale à la mesure des côtés de la base carrée d'un prisme. Si ces deux solides ont le même volume, quelle est la relation entre leur hauteur?

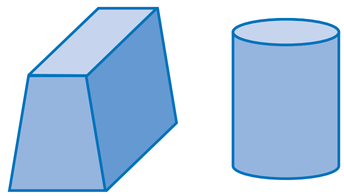
10. Le volume du cylindre A est le double du volume du cylindre B. Le cylindre A est-il nécessairement plus haut que le cylindre B? Justifie ta réponse.

Aire de prismes et de cylindres

Question ouverte

L'**aire d'un solide** désigne la somme des aires de toutes ses faces.

On peut utiliser l'aire d'un solide pour déterminer, par exemple, la plus petite quantité de matériel qui est nécessaire pour le couvrir.



- Choisis un nombre de centimètres carrés entre 100 et 1 000.
- Crée les cinq solides suivants de façon à ce que l'aire de chacun corresponde au nombre de centimètres carrés choisi. Explique ta démarche.

  1. Prisme à base carrée

  2. Prisme à base rectangulaire et non carrée

  3. Prisme à base trapézoïdale

  4. Prisme à base hexagonale ou octogonale

  5. Cylindre

Note : Pour toute réponse faisant appel au nombre π, tu peux donner la valeur exacte exprimée en termes de π ou une valeur approximative calculée en fonction de la valeur de π arrondie à 3,14.

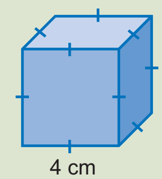
Fiche de réflexion

L'**aire d'un solide** désigne la somme des aires de toutes ses faces.

On peut utiliser l'aire d'un solide pour déterminer, par exemple, la plus petite quantité de matériel qui est nécessaire pour le couvrir, ou encore la quantité de peinture qui est nécessaire pour le peindre.

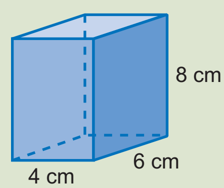
L'aire se mesure en unités carrées, comme des centimètres carrés, des mètres carrés, etc.

Le fait de connaître certaines relations entre les faces du solide permet de réduire le nombre de calculs à effectuer pour déterminer son aire. Par exemple, supposons que l'on a un cube dont les côtés mesurent 4 cm.



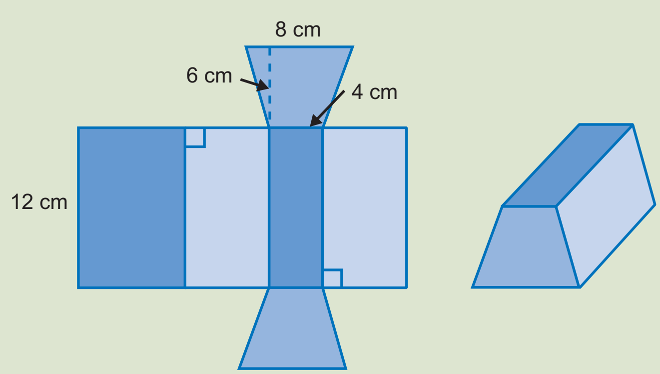
Puisque chaque face a une aire de 16 cm^2, on peut conclure que l'aire totale du cube mesure 96 cm^2.

Mais si l'on a le prisme à base rectangulaire suivant, les 6 faces ne sont pas identiques.



On a plutôt 3 paires de faces identiques.
Deux faces (devant et derrière) ont une aire de 32 cm^2 (4 × 8) chacune.
Deux faces (sur les côtés) ont une aire de 48 cm^2 (8 × 6) chacune.
Deux faces (en haut et en bas) ont une aire de 24 cm^2 (4 × 6) chacune.
Ainsi, l'aire totale sera égale à 208 cm^2 (2 × 32 + 2 × 48 + 2 × 24).

Une façon de visualiser l'aire totale d'un solide consiste à utiliser son développement. Prenons, par exemple, le développement d'un prisme à base trapézoïdale.



Afin de déterminer l'aire du prisme, il suffit d'additionner les aires des 6 figures planes qui composent son développement.

Les 2 trapèzes ont chacun une aire de 36 cm² $\left[\frac{1}{2} \times (8 + 4) \times 6\right]$.

Afin de déterminer l'aire des 4 rectangles, on note que chacun a une hauteur de 12 cm et une largeur qui correspond à la mesure du côté du trapèze auquel il se rattache. Ainsi, un rectangle a une largeur de 8 cm, un autre a une largeur de 4 cm, et les deux autres ont une largeur qui correspond à la mesure des côtés non parallèles du trapèze.

Afin de déterminer la mesure de ces 2 côtés, on peut utiliser le théorème de Pythagore, en constatant que l'un des côtés du triangle rectangle mesure 6 cm et que l'autre mesure 2 cm $\left[\frac{1}{2} \times (8 - 4)\right]$. L'hypoténuse (le côté que l'on cherche à déterminer) mesure donc $\sqrt{(36 + 4)}$ cm ou 6,32 cm.

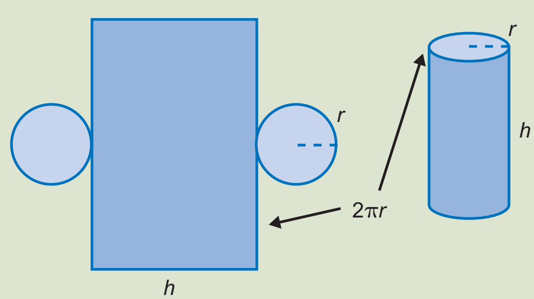
L'aire du prisme mesure alors 367,68 cm²
$[(2 \times 36) + (12 \times 8) + (12 \times 4) + (12 \times 6{,}32) + (12 \times 6{,}32)]$.

Notons que l'expression $[(2 \times 36) + (12 \times 8) + (12 \times 4) + (12 \times 6{,}32) + (12 \times 6{,}32)]$ est égale à l'expression $[(2 \times 36) + 12 \times (8 + 4 + 6{,}32 + 6{,}32)]$ et que la somme $(8 + 4 + 6{,}32 + 6{,}32)$ correspond au périmètre du trapèze à la base du prisme.

On peut donc déterminer l'aire (A) d'un prisme de hauteur h à l'aide de la formule :

$A = 2 \times A_{base} + P_{base} \times h$, où P_{base} représente le périmètre de la base du prisme.

On peut déterminer l'aire d'un cylindre en utilisant la même démarche. Par exemple, le développement suivant illustre les deux bases circulaires et la face latérale d'un cylindre.



Le rectangle correspond à un découpage de la face latérale du cylindre dans le sens de sa hauteur.

On note que l'une des dimensions du rectangle correspond à la hauteur du cylindre, et que l'autre correspond à la circonférence de la base du cylindre (puisque la surface latérale suit le contour des deux bases circulaires). L'aire du rectangle est donc égale à $C_{base} \times h$, où C_{base} représente la circonférence de la base et h représente la hauteur du cylindre.

On peut donc déterminer l'aire (A) d'un cylindre de hauteur h à l'aide de la formule :

$A = 2 \times A_{base} + C_{base} \times h$, où C_{base} représente la circonférence de la base du cylindre.

Puisqu'une circonférence est aussi un périmètre, cette formule est équivalente à celle utilisée pour déterminer l'aire d'un prisme.

Puisque la circonférence de la base est égale à $2\pi r$, l'aire du rectangle est donc égale à $2\pi rh$. De plus, l'aire de la base est égale à πr^2.

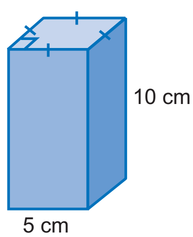
On peut donc aussi dire que la formule pour déterminer l'aire d'un cylindre de rayon r et de hauteur h est :

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh \text{ ou } A = 2\pi r(r + h).$$

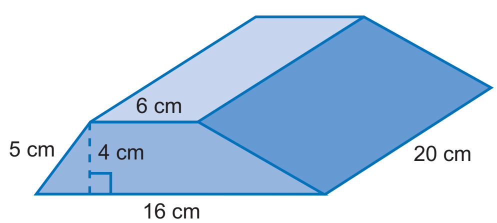
Note : Pour toute réponse faisant appel au nombre π, tu peux donner la valeur exacte exprimée en termes de π ou une valeur approximative calculée en fonction de la valeur de π arrondie à 3,14.

1. Détermine l'aire de la base de chacun des solides. Montre ton travail.

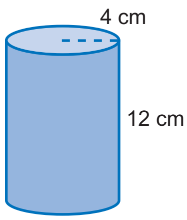
a)



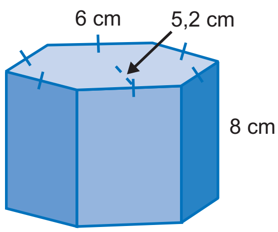
b)



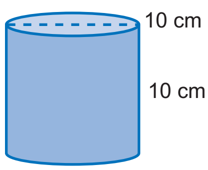
c)



d)



e)



2. Quel est le nombre minimal d'aires que tu dois déterminer séparément pour être en mesure de déterminer l'aire de chaque solide de la question 1? Justifie tes réponses.

3. Détermine l'aire de chaque solide de la question 1.

4. Dans une situation où l'on cherche à déterminer l'aire d'un prisme dont la base est un quadrilatère, indique si les énoncés suivants sont vrais ou faux. Justifie tes réponses.

A : Toutes les faces peuvent avoir la même aire.

B : Au moins 2 faces ont nécessairement la même aire.

C : Il est possible d'avoir exactement 4 faces avec la même aire.

5. Chacun des calculs suivants permet de déterminer l'aire d'un prisme ou d'un cylindre quelconque. Indique ce que tu peux conclure au sujet du solide et de ses dimensions.

a) $6 \times 25\ \text{cm}^2$

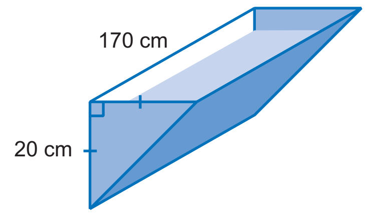
b) $2 \times 12\ \text{cm}^2 + 2 \times 15\ \text{cm}^2 + 2 \times 20\ \text{cm}^2$

c) $2 \times \frac{(3 \times 4)}{2}\ \text{cm}^2 + 3 \times 10\ \text{cm}^2 + 4 \times 10\ \text{cm}^2 + 5 \times 10\ \text{cm}^2$

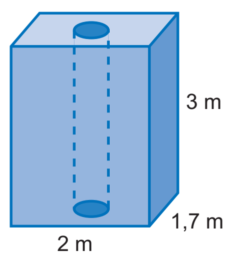
d) $18\pi\ \text{cm}^2 + 60\pi\ \text{cm}^2$

6. Est-il possible qu'un prisme d'une certaine hauteur ait une aire plus petite qu'un prisme moins haut? Justifie ta réponse.

7. Combien de centimètres carrés de métal faut-il pour fabriquer cet abreuvoir? N'oublie pas que le dessus de l'abreuvoir est ouvert. Montre ton travail.



8. Un trou cylindrique ayant un rayon de 0,45 m est creusé sur toute la hauteur du prisme à base rectangulaire suivant.



a) Quelle serait l'aire du prisme s'il n'avait pas de trou?

b) Quelle est l'aire de la forme cylindrique, incluant ses bases inférieure et supérieure?

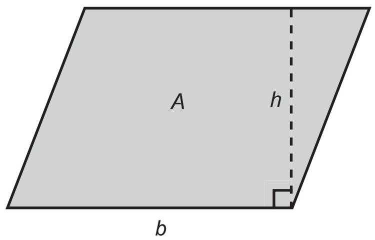
c) Quelle est l'aire du solide obtenu? Montre ton travail.

9. Un prisme à base rectangulaire est très long, mais étroit et pas très haut. Le nombre de centimètres carrés correspondant à son aire est-il alors plus élevé ou moins élevé que le nombre de centimètres cubes correspondant à son volume? Justifie ta réponse.

Fiche de rappel de formules

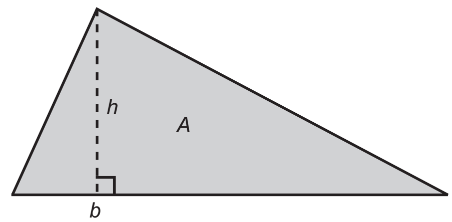
Aire d'un parallélogramme

$A = bh$



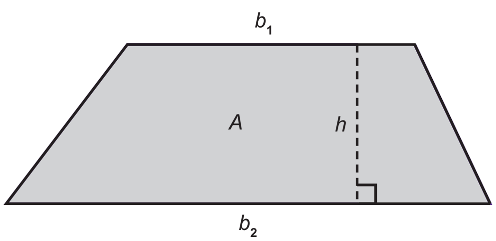
Aire d'un triangle

$A = \frac{1}{2}bh$ ou $A = \frac{bh}{2}$



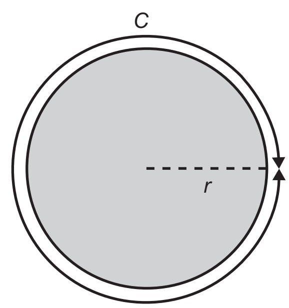
Aire d'un trapèze

$A = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h$



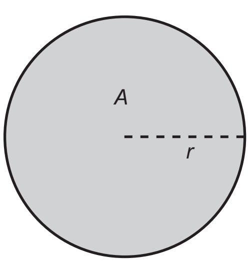
Circonférence d'un cercle

$C = 2\pi r$



Aire d'un cercle

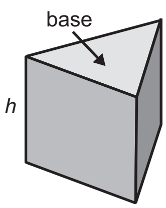
$A = \pi r^2$

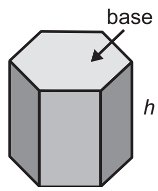


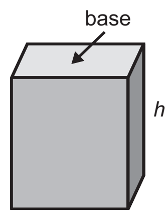
Fiche de rappel de formules (*Suite*)

Volume d'un prisme

$V = A_{base} \times h$ où A_{base} représente l'aire de la base et h la hauteur du prisme.





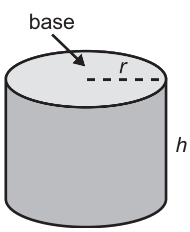


Volume d'un cylindre

$V = A_{base} \times h$ où A_{base} représente l'aire de la base et h la hauteur du cylindre.

OU

$V = \pi r^2 h$ où r représente le rayon de la base et h la hauteur du cylindre.

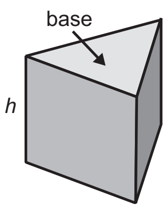


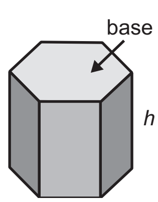
Aire d'un prisme (aire totale de ses faces)

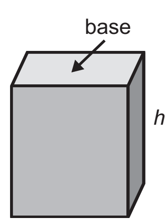
$A = 2 \times A_{base}$ + aire des faces latérales où A_{base} représente l'aire de la base du prisme.

OU

$A = 2 \times A_{base} + P_{base} \times h$ où A_{base} et P_{base} représentent respectivement l'aire et le périmètre de la base, et h la hauteur du prisme.







Fiche de rappel de formules (*Suite*)

Aire d'un cylindre (aire totale de ses faces)

$A = 2 \times A_{base} + C_{base} \times h$	où A_{base} et C_{base} représentent respectivement l'aire et la circonférence de la base, et h la hauteur du cylindre.

OU

$A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$	où r représente le rayon de la base et h la hauteur du cylindre.

OU

$A = 2\pi r(r + h)$	où r représente le rayon de la base et h la hauteur du cylindre.