Aufgabe 1 – *Meisterschaft*

Die Mannschaften aus *Bedigliora*, *Caslano*, *Novaggio*, *Pura* und *Sessa* spielen um die Meisterschaft. Während der Saison muss jede Mannschaft sechs mal gegen jede andere Mannschaft antreten, und bei jedem Spiel wird genau ein Punkt an den Sieger der Begegnung vergeben (es gibt immer einen Sieger und einen Verlierer). Die aktuelle Tabelle ist rechts angegeben. Dabei hat Bedigliora noch 5 ausstehende Spiele gegen Caslano, 3 gegen Sessa und 6 gegen Novaggio. Caslano hat noch 2 ausstehende Spiele gegen Sessa und 5 gegen Novaggio. Sessa muss noch 3 mal gegen Novaggio antreten.

Mannschaft	Punkte
Caslano	8
Novaggio	7
Bedigliora	6
Sessa	3
Pura	0

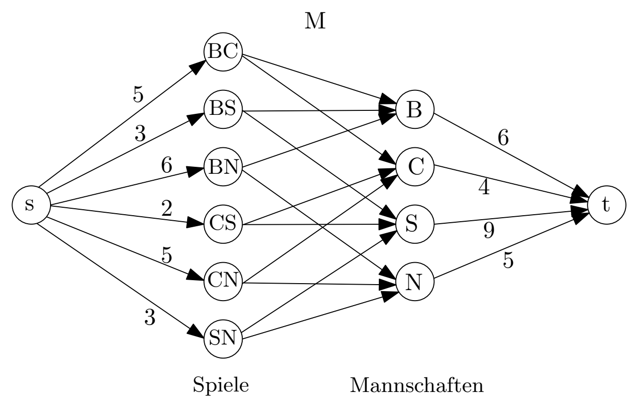
Pura verpflichtet mit sofortiger Wirkung einen Superstar, um doch noch die Meisterschaft zu gewinnen. Aber können sie das überhaupt noch? *Gibt es einen weiteren Saisonverlauf, bei dem Pura am Ende auf einem (womöglich geteilten) ersten Platz landet?*

Modellieren Sie das Problem als Flussproblem in einem Netzwerk.

Hinweis: Wie viele Spiele müsste Pura noch gewinnen, und wie viele dürfen die anderen Mannschaften noch gewinnen? Benutzen Sie diese Informationen, um die Netzwerkkapazitäten geeignet festzulegen.

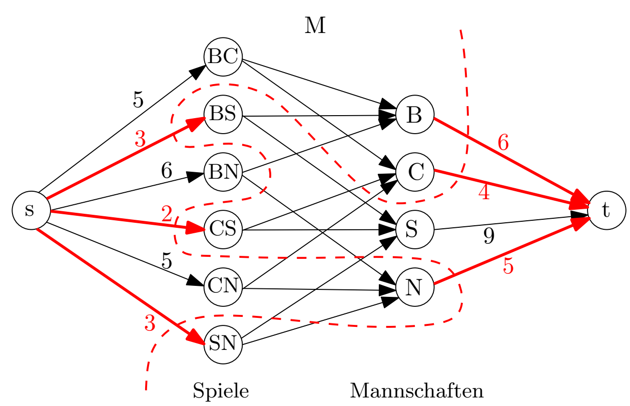
Lösung zu Aufgabe 1 – *Meisterschaft*

In der gesamten Saison werden insgesamt 60 Punkte vergeben (jedes der 10 Mannschaftspaare trifft sechs mal aufeinander). In der Tabelle stehen 24 Punkte. Bei den noch ausstehenden Spielen zwischen Caslano (C), Novaggio (N), Bedigliora (B) und Sessa (S) werden noch 24 Punkte vergeben, folglich hat Pura noch $60 - 24 - 24 = 12$ Spiele zu bestreiten. Im besten Fall gewinnt Pura alle seine Spiele und hat am Saisonende 12 Punkte. Damit dies für den ersten Tabellenplatz reicht, darf Caslano noch höchstens 4 Punkte gewinnen, Novaggio noch 5, Bedigliora noch 6 und Sessa noch 9. Wir konstruieren aus diesen Informationen das folgende Netzwerk, das neben Quelle und Senke für jede der Mannschaften B, C, S, N einen Knoten und für jede der noch ausstehenden Begegnungen (B, C), (B, S), (B, N), (C, S), (C, N), (S, N) einen Knoten besitz.



Die Kapazitäten der Kanten von der Quelle s zu einem Paar (X, Y) von Mannschaften entsprechen der Anzahl noch ausstehender Spiele zwischen den Mannschaften X und Y (und damit den noch zu vergebenden Punkten). Vom Knoten (X, Y) geht eine Kante zum Knoten X und eine Kante zum Knoten Y, beide haben die Kapazität M, wobei M eine sehr grosse Zahl ist, z.B. $M = \max\{2, 3, 5, 6\} = 6$ (die noch zu vergebenden Punkte werden auf irgendeine Weise zwischen X und Y aufgeteilt). Schliesslich hat die Kante zwischen X und t eine Kapazität, die der maximalen Punktanzahl entspricht, die Mannschaft X noch gewinnen darf, so dass Pura Tabellenerster wird.

Damit gilt: Es gibt in diesem Netzwerk einen ganzzahligen Fluss mit dem Wert $5+3+6+2+5+3 = 24$ genau dann wenn es eine Aufteilung der Punkte in den noch ausstehenden Spielen gibt, so dass Pura die Meisterschaft gewinnt ($5 + 3 + 6 + 2 + 5 + 3 = 24$ ist der Wert des s-t-Schnitts (S, T) mit $S = \{s\}$, denn soviele Punkte *mssen* auf irgendeine Weise aufgeteilt werden; dieser Wert ist hier zufällig gleich dem Wert des s-t-Schnitts (S', T') mit $T' = \{t\}$, aber der Wert des letzteren Schnitts könnte im Prinzip viel grösser sein, denn er gibt nur eine *Obergrenze* an, wieviele Punkte jede Mannschaft noch gewinnen darf). Untenstehendes Bild aber zeigt einen Schnitt der Kapazität $3+2+3+6+4+5 = 23$ in diesem Netzwerk. Nach dem Maxflow-Mincut-Theorem kann es demnach keinen Fluss mit dem Wert 24 geben. Damit kann Pura nicht mehr Meister werden. Pura hatte also offenbar nicht genügend Wissen um Netzwerkflüsse.


M
BC
BS
BN
CS
CN
SN
B
C
S
N
s
t
5
3
6
2
5
3
6
4
9
5
Spiele
Mannschaften